MATEMATISKA INSTITUTIONEN
STOCKHOLMS UNIVERSITET
Avd. Matematik
Examinator: Per Alexandersson

Tentamensskrivning i
Linjär algebra, Matematik I, 5 hp
2025-05-28

Tillåtna hjälpmedel är skrivdon. Fullständiga och väl motiverade lösningar krävs. Svaren ska framgå tydligt och vara rimligt slutförenklade. 15 poäng ger minst E. Bonuspoäng räknas in under rättningen. Koordinater förutsätts vara angivna i standardbasen om inget annat anges.

1. Låt $\mathbf{f}_1 = \frac{1}{13}(5, 12)$ vara en vektor i $\mathbb{R}^2$. (6p)
   (a) Bestäm en vektor $\mathbf{f}_2$ så att $\mathbf{f}_1$ och $\mathbf{f}_2$ är vinkelräta, och så att $\|\mathbf{f}_2\| = 1$.
   (b) Bestäm den vinkelräta projektionen av vektorn $\mathbf{v} = (7, -3)$ på $\mathbf{f}_1$.
   (c) Visa att $\mathbf{v} = (\mathbf{f}_1 \cdot \mathbf{v})\mathbf{f}_1 + (\mathbf{f}_2 \cdot \mathbf{v})\mathbf{f}_2$.

2. Damerna Agda, Berit, Ester och Gerd har sina traditionella recept för en burk kakbas (se tabell). Gerd har inte orkat handla och hennes burk är tom. Kan Gerd ta av sina tre vänners burkar med kakbas och blanda till sitt recept? Hur mycket från Agda, Berit och Esters burkar ska hon i så fall ta? *Tips: Skriv Gerds recept som en linjärkombination av hennes vänners recept.* (6p)

Namn	**Mjöl (dl)**	**Socker (dl)**	**Bakpulver (tsk)**
Agda	5	2	4
Berit	8	5	6
Ester	6	3	2
Gerd	6	3	4

3. Punkterna $P_1 = (2, 0, 1)$, $P_2 = (2, 3, a)$, $P_3 = (0, -3a, 1)$ och $P_4 = (2, 3, a-1)$ utgör hörnen i en tetraeder i $\mathbb{R}^3$, för $a \in \mathbb{R}$. Bestäm volymen av tetraedern. (6p)

4. Två linjer i $\mathbb{R}^3$ ges på parameterform: (6p)
$$L_1 : (4, -3, 8) + t(2, 3, -3),\ t \in \mathbb{R}, \qquad L_2 : (2, 2, 3) + s(1, 1, -2),\ s \in \mathbb{R}.$$
   (a) Bestäm kortaste avståndet mellan linjerna.
   (b) Bestäm det plan som innehåller origo men ej skär L_1 eller L_2 på normalform.

5. Den linjära avbildningen $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ speglar i planet $x + 3y - 2z = 0$. Vektorerna $\mathbf{f}_1 = (1, 3, -2)$, $\mathbf{f}_2 = (-1, 1, 1)$, $\mathbf{f}_3 = (2, 0, 1)$ är en bas för $\mathbb{R}^3$. (6p)
   (a) Bestäm avbildningsmatrisen för T med avseende på $\mathbf{f}$-basen.
   (b) Bestäm basbytesmatrisen som byter från $\mathbf{f}$-basen till standardbasen.
   (c) Bestäm avbildningsmatrisen för T med avseende på standardbasen.
   (d) Låt $S(x, y, z) = T(x+y, z-y, x+z)$ vara en ny linjär avbildning. Avgör om S har invers eller inte.

Lycka till!