MATEMATISKA INSTITUTIONEN
STOCKHOLMS UNIVERSITET
Avd. Matematik
Examinator: Per Alexandersson

Tentamensskrivning i
Linjär algebra, Matematik I, 5 hp
2025-05-28

Tillåtna hjälpmedel är skrivdon. Fullständiga och väl motiverade lösningar krävs. Svaren ska framgå tydligt och vara rimligt slutförenklade. 15 poäng ger minst E. Bonuspoäng räknas in under rättningen. Koordinater förutsätts vara angivna i standardbasen om inget annat anges.

1. Låt $\mathbf{f}_1 = \frac{1}{13}(5, 12)$ vara en vektor i $\mathbb{R}^2$. (6p)

   (a) Bestäm en vektor $\mathbf{f}_2$ så att $\mathbf{f}_1$ och $\mathbf{f}_2$ är vinkelräta, och så att $\|\mathbf{f}_2\| = 1$.

   (b) Bestäm den vinkelräta projektionen av vektorn $\mathbf{v} = (7, -3)$ på $\mathbf{f}_1$.

   (c) Visa att $\mathbf{v} = (\mathbf{f}_1 \cdot \mathbf{v})\mathbf{f}_1 + (\mathbf{f}_2 \cdot \mathbf{v})\mathbf{f}_2$.

   Lösning. (a) T.ex $\mathbf{f}_2 = \frac{1}{13}(12, -5)$.

   (b) Vi har att projektionen ges av

$$\frac{\mathbf{v} \cdot \mathbf{f}_1}{\|\mathbf{f}_1\|^2}\mathbf{f}_1 = \frac{1}{13}(7, -3) \cdot (5, 12)\mathbf{f}_1 = -\frac{1}{13}\mathbf{f}_1.$$

   (c) Detta gäller enligt sats från kursen, eftersom $\mathbf{f}_1, \mathbf{f}_2$ är en ON-bas (lätt att kolla).

   Alternativt så beräknar man de två skalärprodukterna och jämför.

   Som tredje alternativ: Man kan rita en figur och använda sig av egenskaper för ortogonal projektion—dvs. eftersom $\mathbf{f}_1$ och $\mathbf{f}_2$ är vinkelräta, så är $\mathbf{v}$ summan av sina projektioner på $\mathbf{f}_1$ och $\mathbf{f}_2$.

2. Damerna Agda, Berit, Ester och Gerd har sina traditionella recept för en burk kakbas (se tabell). Gerd har inte orkat handla och hennes burk är tom. Kan Gerd ta av sina tre vänners burkar med kakbas och blanda till sitt recept? Hur mycket från Agda, Berit och Esters burkar ska hon i så fall ta? *Tips: Skriv Gerds recept som en linjärkombination av hennes vänners recept.* (6p)

Namn	**Mjöl (dl)**	**Socker (dl)**	**Bakpulver (tsk)**
Agda	5	2	4
Berit	8	5	6
Ester	6	3	2
Gerd	6	3	4

   Lösning. Varje recept för en kakbas skriver vi som en vektor:

$$\mathbf{v}_A = (5, 2, 4),\ \mathbf{v}_B = (8, 5, 6),\ \mathbf{v}_E = (6, 3, 2),\ \mathbf{v}_G = (6, 3, 4).$$

Problemet vi vill lösa är huruvida $\mathbf{v}_G$ kan skrivas som en linjärkombination av de andra vektorerna. Omskrivet som ett ekvationssystem på matrisform:

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 5 & 8 & 6 & 6 \\ 2 & 5 & 3 & 3 \\ 4 & 6 & 2 & 4 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{ccc|c} 5 & 8 & 6 & 6 \\ 2 & 5 & 3 & 3 \\ 2 & 3 & 1 & 2 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 4 & 2 \\ 0 & 2 & 2 & 1 \\ 2 & 3 & 1 & 2 \end{array}\right].$$

Fortsätter vi med gausseliminering får vi

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 4 & 2 \\ 0 & 2 & 2 & 1 \\ 2 & 3 & 1 & 2 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 4 & 2 \\ 0 & 2 & 2 & 1 \\ 0 & -1 & -7 & -2 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 4 & 2 \\ 0 & 0 & -12 & -3 \\ 0 & 1 & 7 & 2 \end{array}\right].$$

Ett par steg till ger

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 4 & 2 \\ 0 & 1 & 7 & 2 \\ 0 & 0 & 4 & 1 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & \frac{1}{4} \\ 0 & 0 & 1 & \frac{1}{4} \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & \frac{1}{2} \\ 0 & 1 & 0 & \frac{1}{4} \\ 0 & 0 & 1 & \frac{1}{4} \end{array}\right].$$

Vi fick en unik lösning, nämligen att Gerd tar $\frac{1}{2}$ av Agdas burk, och $\frac{1}{4}$ av var och en av Berit och Esters burkar.

3. Punkterna $P_1 = (2, 0, 1)$, $P_2 = (2, 3, a)$, $P_3 = (0, -3a, 1)$ och $P_4 = (2, 3, a-1)$ utgör hörnen i en tetraeder i $\mathbb{R}^3$, för $a \in \mathbb{R}$. Bestäm volymen av tetraedern. (6p)

Lösning. Vi bildar tre vektorer som utgår från P_1:

$$\vec{P_1P_2} = (0, 3, a-1),\ \vec{P_1P_3} = (-2, -3a, 0),\ \vec{P_1P_4} = (0, 3, a-2).$$

Volymen (upp till tecken) av tetraedern ges nu av $\frac{1}{6}$ av determinanten av den matris vars kolonner är dessa tre vektorer. Vi beräknar determinanten genom utveckling längs med första raden:

$$\begin{vmatrix} 0 & -2 & 0 \\ 3 & -3a & 3 \\ a-1 & 0 & a-2 \end{vmatrix} = -(-2) \begin{vmatrix} 3 & 3 \\ a-1 & a-2 \end{vmatrix} = 2(3(a-2) - 3(a-1)) = -6.$$

Alltså har tetraedern volymen 1, oberoende av a's värde.

4. Två linjer i $\mathbb{R}^3$ ges på parameterform: (6p)

$$L_1 : (4, -3, 8) + t(2, 3, -3),\ t \in \mathbb{R}, \qquad L_2 : (2, 2, 3) + s(1, 1, -2),\ s \in \mathbb{R}.$$

(a) Bestäm kortaste avståndet mellan linjerna.

(b) Bestäm det plan som innehåller origo men ej skär L_1 eller L_2 på normalform.

Lösning. Låt punkterna P och Q ligga på L_1 och L_2, respektive. Kortaste avståndet sker då vektorn PQ är vinkelrät mot $(2,3,-3)$ samt $(1,1,-2)$. Vi har

$$\begin{aligned} PQ &= (2,2,3) + s(1,1,-2) - (4,-3,8) - t(2,3,-3) \\ &= (-2+s-2t, 5+s-3t, -5-2s+3t). \end{aligned}$$

Vi vill nu att

$$\begin{cases} (-2+s-2t, 5+s-3t, -5-2s+3t)\cdot(2,3,-3) &= 0 \\ (-2+s-2t, 5+s-3t, -5-2s+3t)\cdot(1,1,-2) &= 0. \end{cases}$$

Vi får då

$$\begin{cases} 26+11s-22t &= 0 \\ 13+6s-11t &= 0 \end{cases} \implies \begin{cases} 26+11s-22t &= 0 \\ 26+12s-22t &= 0 \end{cases} \implies s=0, \quad t=\frac{13}{11}.$$

Vektorn PQ blir då $\frac{16}{11}(-3,1,-1)$ som har längden $\frac{16\sqrt{11}}{11}$.

Vi vet att vektorn PQ är vinkelrät mot båda linjernas riktningsvektorer, så detta är planets normal. Alltså kan vi ta ekvationen $-3x+y-z=0$ för planet.

5. Den linjära avbildningen $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ speglar i planet $x+3y-2z=0$. Vektorerna $\mathbf{f}_1 = (1,3,-2)$, $\mathbf{f}_2 = (-1,1,1)$, $\mathbf{f}_3 = (2,0,1)$ är en bas för $\mathbb{R}^3$. (6p)

   (a) Bestäm avbildningsmatrisen för T med avseende på $\mathbf{f}$-basen.

   (b) Bestäm basbytesmatrisen som byter från $\mathbf{f}$-basen till standardbasen.

   (c) Bestäm avbildningsmatrisen för T med avseende på standardbasen.

   (d) Låt $S(x,y,z) = T(x+y, z-y, x+z)$ vara en ny linjär avbildning. Avgör om S har invers eller inte.

Lösning. (a) Vi ser att $\mathbf{f}_1$ är normal till planet, och att $\mathbf{f}_2$ samt $\mathbf{f}_3$ är vinkelräta mot $\mathbf{f}_1$. Alltså gäller

$$T(\mathbf{f}_1) = -\mathbf{f}_1, \quad T(\mathbf{f}_2) = \mathbf{f}_2, \quad T(\mathbf{f}_3) = \mathbf{f}_3.$$

Matrisen för T med avseende på $\mathbf{f}$-basen är då

$$A' = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

(b) Basbytesmatrisen **f**-basen till standardbasen har kolonner som ges av **f**-vektorerna:

$$Q = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 3 & 1 & 0 \\ -2 & 1 & 1 \end{bmatrix}.$$

(c) Vi kan nu bestämma avbildningsmatrisen för T:

$$A = QA'Q^{-1} = \frac{1}{7}\begin{bmatrix} 6 & -3 & 2 \\ -3 & -2 & 6 \\ 2 & 6 & 3 \end{bmatrix}.$$

Här behöver man på vägen beräkna

$$Q^{-1} = \frac{1}{14}\begin{bmatrix} 1 & 3 & -2 \\ -3 & 5 & 6 \\ 5 & 1 & 4 \end{bmatrix}.$$

Alternativt: Spegling i planet med normalen $\mathbf{n} = (1, 3, -2)$ ges av

$$T(\mathbf{v}) = \mathbf{v} - 2\mathbf{v}_{\mathbf{n}} = \mathbf{v} - 2\frac{\mathbf{v}\cdot\mathbf{n}}{\|\mathbf{n}\|^2}\mathbf{n} = \mathbf{v} - 2\frac{\mathbf{v}\cdot\mathbf{n}}{14}\mathbf{n}.$$

Alltså gäller

$$\begin{aligned} T(\mathbf{e}_1) &= (1,0,0) - \frac{1}{7}(1,3,-2) = \frac{1}{7}(6,-3,2) \\ T(\mathbf{e}_2) &= (0,1,0) - \frac{3}{7}(1,3,-2) = \frac{1}{7}(-3,-2,6) \\ T(\mathbf{e}_3) &= (0,0,1) - \frac{-2}{7}(1,3,-2) = \frac{1}{7}(2,6,3). \end{aligned}$$

Dessa är nu kolonnerna i avbildningsmatrisen vi söker.

(d) Vi har att

$$\begin{bmatrix} x+y \\ z-y \\ x+z \end{bmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}}_{B} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix},$$

så avbildningsmatrisen för S i standardbasen ges av produkten AB, där A är avbildningsmatrisen för T. Eftersom $|B| = 0$ (summan av de två första kolonnerna är den sista) så är $|AB| = |A|\cdot|B| = 0$, så S saknar invers. Alternativt,

$$S(1,-1,-1) = T(0,0,0) = S(0,0,0)$$

så två olika punkter avbildas på $(0,0,0)$. Alltså saknas invers.