

Tillåtna hjälpmedel är skrivdon. Fullständiga och väl motiverade lösningar krävs. Svaren ska framgå tydligt och vara rimligt slutförenklade. 15 poäng ger minst E.

Koordinater förutsätts vara angivna i standardbasen om inget annat anges.

1. Bestäm, för varje reellt tal $a \in \mathbb{R}$, alla lösningar till ekvationssystemet: (6p)

$$\begin{cases} ax + y - az &= -1 \\ x + 2y + z &= 2 \\ 2x + 4y - z &= -2 \\ 2x + 4y + 5z &= 10. \end{cases}$$

2. (a) Avgör för vilka värden på det reella talet $a \in \mathbb{R}$ som följande matris är inverterbar: (3p)

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 1 & a & -2 \\ 0 & -1 & 2 \end{pmatrix}.$$

- (b) Avgör för vilka värden på det reella talet $a \in \mathbb{R}$ som matrisen A (från föregående deluppgift) kommuterar med matrisen B (dvs $AB = BA$) där: (3p)

$$B = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

3. Låt $\bar{u} = (1, 2, -1, 3)$, $\bar{v} = (3, 4, -3, 1)$, $\bar{w} = (-4, -3, 4, 8)$, vara vektorer i $\mathbb{R}^4$.

- (a) Avgör om vektorerna $\bar{u}$, $\bar{v}$, $\bar{w}$ är linjärt oberoende. (3p)
- (b) Avgör om vektorn $\bar{t} = (1, 1, -1, 1)$ i $\mathbb{R}^4$ är en linjärkombination av $\bar{u}$, $\bar{v}$, $\bar{w}$. (3p)

4. (a) Bestäm två olika plan (på normalform) som skär varandra ortogonalt och som båda innehåller linjen $\ell : \{(1+t, 1, 1-t) : t \in \mathbb{R}\}$. (3p)
- (b) Bestäm avståndet mellan planet p_1 givet på normalform av $x-2y+z=1$ och planet p_2 givet på parameterform av $(1, 1, 1) + s(3, 2, 1) + t(-1, 2, 5)$ där $s, t \in \mathbb{R}$ är parametrar. (3p)
5. För godtyckliga vektorer $\bar{u}, \bar{w}$ i $\mathbb{R}^3$ så låt $\text{proj}_{\bar{u}}(\bar{w})$ beteckna den ortogonala projektionen av vektorn $\bar{w}$ på vektorn $\bar{u}$.
- Låt $\bar{u} = (1, 0, 1)$, $\bar{v} = (2, 1, 1)$ vara vektorer i $\mathbb{R}^3$ och låt $T : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ vara avbildningen som definieras av $T(\bar{w}) = \text{proj}_{\bar{u}}(\bar{w}) + \text{proj}_{\bar{v}}(\bar{w})$.
- (a) Bestäm $T(a, b, c)$ för en godtycklig vektor (a, b, c) i $\mathbb{R}^3$. (2p)
- (b) Visa att T är en linjär avbildning. (2p)
- Notera att man inte får ta det för givet att ortogonal projektion är linjär.*
- (c) Hitta en nollskild vektor $\bar{w}$ sådan att $T(\bar{w}) = (0, 0, 0)$. (2p)