

Tillåtna hjälpmedel är skrivdon. Fullständiga och väl motiverade lösningar krävs. Svaren ska framgå tydligt och vara rimligt slutförenklade. 15 poäng ger minst E. Eventuella bonuspoäng räknas in under rättningen.

Koordinater förutsätts vara angivna i standardbasen om inget annat anges.

1. Bestäm, för varje reellt tal $a \in \mathbb{R}$, alla lösningar till ekvationssystemet: (6p)

$$\begin{cases} ax + y - az &= -1 \\ x + 2y + z &= 2 \\ 2x + 4y - z &= -2 \\ 2x + 4y + 5z &= 10. \end{cases}$$

Lösning. Vi skriver ekvationssystemet i en utvidgad matris och använder Gauss-elimination,

$$\begin{aligned} \left(\begin{array}{ccc|c} a & 1 & -a & -1 \\ 1 & 2 & 1 & 2 \\ 2 & 4 & -1 & -2 \\ 2 & 4 & 5 & 10 \end{array} \right) &\sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 1 & 2 \\ a & 1 & -a & -1 \\ 2 & 4 & -1 & -2 \\ 2 & 4 & 5 & 10 \end{array} \right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 1 & 2 \\ 0 & 1-2a & -2a & -1-2a \\ 0 & 0 & -3 & -6 \\ 0 & 0 & 3 & 6 \end{array} \right) \\ &\sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 1 & 2 \\ 0 & 1-2a & -2a & -1-2a \\ 0 & 0 & -3 & -6 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 1 & 2 \\ 0 & 1-2a & -2a & -1-2a \\ 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right) \\ &\sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1-2a & 0 & -1+2a \\ 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right) \end{aligned}$$

I första steget så bytte vi plats på rad 1 och rad 2. I andra steget så adderade vi rad 1 multiplicerad med $-a$ till rad 2 och sedan adderade vi rad 1 multiplicerad med -2 till rad 3 och sedan adderade vi rad 1 multiplicerad med -2 till rad 4. I tredje steget så adderade vi rad 3 till rad 4. I fjärde steget så multiplicerade vi rad 3 med $-1/3$. I femte steget så adderade vi rad 4 multiplicerad med -1 till rad 1 och sedan adderade vi rad 1 multiplicerad med $2a$ till rad 2.

Vi delar nu upp i två fall:

- Om $a = 1/2$, så får vi matrisen (på reducerad trappstegsform),

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right)$$

och därmed en fri variabel y som vi sätter lika med parametern $t \in \mathbb{R}$. Lösningarna i detta fall blir då $(x, y, z) = (0, 0, 2) + t(-2, 1, 0)$ för godtyckligt $t \in \mathbb{R}$.

- Slutligen, om $a \neq 1/2$ så får vi genom Gauss-elimination att

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1-2a & 0 & -1+2a \\ 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right)$$

där vi multiplicerade rad 2 med $1/(1-2a)$ och sedan adderade rad 2 multiplicerad med -2 till rad 1. Alltså så har vi i detta fall en unik lösning $(x, y, z) = (2, -1, 2)$.

2. (a) Avgör för vilka värden på det reella talet $a \in \mathbb{R}$ som följande matris är inverterbar: (3p)

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 1 & a & -2 \\ 0 & -1 & 2 \end{pmatrix}.$$

Lösning. Vi beräknar determinanten

$$\det A = \begin{vmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 1 & a & -2 \\ 0 & -1 & 2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & a & -1 \\ 0 & -1 & 2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a & -1 \\ -1 & 2 \end{vmatrix} = 2a - 1,$$

där vi först adderade rad 1 multiplicerad med -1 till rad 2, sedan utvecklade längs första kolonnen, och slutligen använde formeln för determinanter av 2×2 -matriser. En matris är inverterbar om determinanten är nollskild, vilket i detta fall är då $a \neq 1/2$.

- (b) Avgör för vilka värden på det reella talet $a \in \mathbb{R}$ som matrisen A (från (3p) föregående deluppgift) kommuterar med matrisen B (dvs $AB = BA$) där:

$$B = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Lösning. Vi beräknar

$$AB - BA = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 2-a & a-2 & 2a-1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 0 & a-2 & 3 \\ 1 & a-1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 2-a & 0 & 2a-4 \\ 0 & 2-a & 0 \end{pmatrix}.$$

Alltså kommuterar matriserna A och B om $a = 2$.

3. Låt $\bar{u} = (1, 2, -1, 3)$, $\bar{v} = (3, 4, -3, 1)$, $\bar{w} = (-4, -3, 4, 8)$, vara vektorer i $\mathbb{R}^4$.

- (a) Avgör om vektorerna $\bar{u}$, $\bar{v}$, $\bar{w}$ är linjärt oberoende. (3p)

Lösning. Vektorerna $\bar{u}$, $\bar{v}$, $\bar{w}$ är linjärt oberoende om ekvationen $\lambda\bar{u} + \mu\bar{v} + \nu\bar{w} = (0, 0, 0, 0)$ där λ, μ, ν är variabler, endast har lösningen $\lambda = \mu = \nu = 0$. Vi skriver upp ekvationen i en utvidgad matris och använder Gauss-elimination,

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & -4 & 0 \\ 2 & 4 & -3 & 0 \\ -1 & -3 & 4 & 0 \\ 3 & 1 & 8 & 0 \end{array} \right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & -4 & 0 \\ 0 & -2 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -8 & 20 & 0 \end{array} \right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & -4 & 0 \\ 0 & -2 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right)$$

I första steget så adderade vi rad 1 multiplicerad med -2 till rad 2 och sedan adderade vi rad 1 till rad 3 och sedan adderade vi rad 1 multiplicerad med -3 till rad 4. I andra steget så adderade vi rad 2 multiplicerad med 4 till rad 4. Matrisen är nu på trappstegsform och eftersom det finns en fri variabel (tre variabler totalt och två pivotvariabler) så har ekvationen oändligt många lösningar. Alltså är vektorerna linjärt beroende.

- (b) Avgör om vektorn $\bar{t} = (1, 1, -1, 1)$ i $\mathbb{R}^4$ är en linjärkombination av $\bar{u}$, $\bar{v}$, $\bar{w}$. (3p)

Lösning. Vi skriver upp ekvationen i en utvidgad matris och använder samma Gauss-eliminationssteg som i föregående uppgift,

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & -4 & 1 \\ 2 & 4 & -3 & 1 \\ -1 & -3 & 4 & -1 \\ 3 & 1 & 8 & 1 \end{array} \right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & -4 & 1 \\ 0 & -2 & 5 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -8 & 20 & -2 \end{array} \right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & -4 & 1 \\ 0 & -2 & 5 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{array} \right).$$

Eftersom sista ekvationen aldrig är uppfylld så finns inga lösningar till ekvationssystemet. Alltså är $\bar{t}$ inte en linjärkombination av $\bar{u}$, $\bar{v}$, $\bar{w}$.

4. (a) Bestäm två olika plan (på normalform) som skär varandra ortogonalt och som båda innehåller linjen $\ell : \{(1+t, 1, 1-t) : t \in \mathbb{R}\}$. (3p)

Lösning. Linjen ℓ har en riktningsvektor $\bar{u} = (1, 0, -1)$. Vi väljer en vektor som är ortogonal mot $\bar{u}$, t ex $\bar{v} = (0, 1, 0)$. Kryssprodukten $\bar{w} = \bar{u} \times \bar{v}$ är då ortogonal mot både $\bar{u}$ och $\bar{v}$. Vi beräknar

$$\bar{u} \times \bar{v} = \left(\begin{vmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{vmatrix}, -\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 0 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} \right) = (1, 0, 1).$$

Låt nu p vara ett plan med $\bar{v}$ som en normalvektor, vilket ger ekvationen $y + D = 0$ för något tal D . Låt q vara ett plan med $\bar{w}$ som en normalvektor, vilket ger ekvationen $x + z + E = 0$ för något tal E . Dessa plan är ortogonala mot varandra (eftersom deras normalvektorer är det). Punkten $P = (1, 1, 1)$ ligger på linjen ℓ . Genom att sätta $D = -1$ och $E = -2$ så ligger P på p och q , och eftersom ℓ s riktningsvektor är ortogonal mot normalvektorerna till $p : y - 1 = 0$ och $q : x + z - 2 = 0$ så innehåller dessa plan linjen ℓ .

- (b) Bestäm avståndet mellan planet p_1 givet på normalform av $x - 2y + z = 1$ och planet p_2 givet på parameterform av $(1, 1, 1) + s(3, 2, 1) + t(-1, 2, 5)$ där $s, t \in \mathbb{R}$ är parametrar. (3p)

Lösning. Vi beräknar en normalvektor till p_2 genom att beräkna kryssprodukten

$$(3, 2, 1) \times (-1, 2, 5) = \left(\begin{vmatrix} 2 & 2 \\ 1 & 5 \end{vmatrix}, -\begin{vmatrix} 3 & -1 \\ 1 & 5 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} 3 & -1 \\ 2 & 2 \end{vmatrix} \right) = (8, -16, 8),$$

vilken är parallell med normalvektorn $\bar{n} = (1, -2, 1)$ till planet p_1 . Alltså är planen p_1 och p_2 parallella. Vi kan därför ta godtyckliga punkter, säg $P_1 = (1, 0, 0)$ på p_1 och $P_2 = (1, 1, 1)$ på p_2 , där avståndet mellan p_1 och p_2 blir längden av ortogonala projektionen av $\overline{P_1 P_2} = (0, 1, 1)$ på $\bar{n}$, dvs

$$||\text{proj}_{\bar{n}}(\overline{P_1 P_2})|| = |\bar{n} \cdot \overline{P_1 P_2}| / ||\bar{n}|| = |-1| / \sqrt{6} = 1/\sqrt{6}.$$

5. För godtyckliga vektorer $\bar{u}, \bar{w}$ i $\mathbb{R}^3$ så låt $\text{proj}_{\bar{u}}(\bar{w})$ beteckna den ortogonala projektionen av vektorn $\bar{w}$ på vektorn $\bar{u}$.

Låt nu $\bar{u} = (1, 0, 1)$, $\bar{v} = (2, 1, 1)$ och låt $T : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ vara avbildningen som definieras av $T(\bar{w}) = \text{proj}_{\bar{u}}(\bar{w}) + \text{proj}_{\bar{v}}(\bar{w})$.

- (a) Bestäm $T((a, b, c))$ för en godtycklig vektor (a, b, c) i $\mathbb{R}^3$. (2p)

Lösning. Vi har att

$$\begin{aligned} T((a, b, c)) &= \frac{(a+c)}{2}(1, 0, 1) + \frac{(2a+b+c)}{6}(2, 1, 1) \\ &= \frac{1}{6}(7a+2b+5c, 2a+b+c, 5a+b+4c). \end{aligned}$$

- (b) Visa att T är en linjär avbildning. (2p)

Notera att man inte får ta det för givet att ortogonal projektion är linjär.

Lösning. Vi har att

$$\begin{aligned} T(\lambda(a, b, c) + \mu(d, e, f)) &= \frac{1}{6}(7(\lambda a + \mu d) + 2(\lambda b + \mu e) + 5(\lambda c + \mu f), \\ &\quad 2(\lambda a + \mu d) + \lambda b + \mu e + \lambda c + \mu f, 5(\lambda a + \mu d) + \lambda b + \mu e + 4(\lambda c + \mu f)) \\ &= \frac{\lambda}{6}(7a+2b+5c, 2a+b+c, 5a+b+4c) + \frac{\mu}{6}(7d+2e+5f, 2d+e+f, 5d+e+4f) \\ &= \lambda T((a, b, c)) + \mu T((d, e, f)). \end{aligned}$$

Alltså är T en linjär avbildning.

- (c) Hitta en nollskild vektor $\bar{w}$ sådan att $T(\bar{w}) = (0, 0, 0)$. (2p)

Lösning. Om en vektor $\bar{w}$ är ortogonal mot $\bar{u}$ så är $\text{proj}_{\bar{u}}(\bar{w}) = (0, 0, 0)$ och motsvarande gäller för $\bar{v}$. Alltså har vi att

$$T(\bar{u} \times \bar{v}) = \text{proj}_{\bar{u}}(\bar{u} \times \bar{v}) + \text{proj}_{\bar{v}}(\bar{u} \times \bar{v}) = (0, 0, 0) + (0, 0, 0) = (0, 0, 0)$$

och

$$\bar{u} \times \bar{v} = \left(\begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix}, -\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 1 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} \right) = (-1, 1, 1) \neq (0, 0, 0).$$