

Tillåtna hjälpmedel är skrivdon. Fullständiga och väl motiverade lösningar krävs. Svaren ska framgå tydligt och vara rimligt slutförenklade. 15 poäng ger minst E.

Koordinater förutsätts vara angivna i standardbasen om inget annat anges.

1. Bestäm, för varje reellt tal  $a \in \mathbb{R}$ , alla lösningar till ekvationssystemet: (6p)

$$\begin{cases} ax - 2y + 2z - 5w = 0 \\ x + 2y + 2z - 3w = 1 \\ -x - 2y - z + w = 0 \end{cases}$$

2. (a) Avgör för vilka värden på det reella talet  $a \in \mathbb{R}$  som vektorerna  $\bar{u} = (1, a, a)$ ,  $\bar{v} = (-2, 2, 3)$ ,  $\bar{w} = (1, -1, -6)$  är linjärt oberoende. (3p)

- (b) Beräkna, för varje värde på det reella talet  $a \in \mathbb{R}$ , determinanten till matrisen  $2 \cdot A^{10}$  där: (3p)

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 \\ a & 2 & -1 \\ a & 3 & -6 \end{pmatrix}.$$

3. Låt  $p_1$  vara planet givet på normalform av  $x - 2y + z = -1$  och planet  $p_2$  givet på parameterform av  $(1, 1, 1) + s(2, 2, 1) + t(-1, 2, 3)$  där  $s, t \in \mathbb{R}$  är parametrar.

- (a) Bestäm  $a \in \mathbb{R}$  sådant att de tre planen  $p_1$ ,  $p_2$ ,  $p_3$  skär varandra i en linje  $\ell$ , där planet  $p_3$  är given på normalform av  $-x + y - 3z = a$ . (3p)

- (b) Bestäm linjen  $\ell$  på parameterform. (3p)

4. Bestäm avbildningsmatrisen i standardbasen för den linjära avbildningen  $T : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$  vilken definieras av att vektorn  $\bar{u}$  först avbildas på  $\bar{v} \times \bar{u}$  där  $\bar{v} = (-1, 1, 1)$  och därefter speglas i planet  $x = y$ . (6p)

5. (a) Låt  $T : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$  vara en avbildning. Ge definitionen av vad det betyder (2p)  
för  $T$  att vara en *linjär* avbildning.

(b) Fixera vektorn  $\bar{u} = (1, 0)$ . Låt  $T_1 : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$  definieras genom (2p)

$$T_1(\bar{v}) = 2\bar{v} + \bar{u}.$$

Bevisa eller motbevisa att  $T_1$  är en linjär avbildning.

(c) Fixera igen vektorn  $\bar{u} = (1, 0)$ . Låt  $T_2 : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$  definieras genom (2p)

$$T_2(\bar{v}) = \text{proj}_{\bar{v}}(\bar{u}),$$

där  $\text{proj}_{\bar{v}}(\bar{u})$  betecknar den ortogonala projektionen av  $\bar{u}$  på  $\bar{v}$ .  
Bevisa eller motbevisa att  $T_2$  är en linjär avbildning.