MATEMATISKA INSTITUTIONEN
STOCKHOLMS UNIVERSITET
Avd. Matematik
Examinator: Jonas Bergström

Tentamensskrivning i
Linjär algebra, Matematik I, 5 hp
den 7 februari 2026

Tillåtna hjälpmedel är skrivdon. Fullständiga och väl motiverade lösningar krävs. Svaren ska framgå tydligt och vara rimligt slutförenklade. 15 poäng ger minst E.

Koordinater förutsätts vara angivna i standardbasen om inget annat anges.

1. Bestäm, för varje reellt tal $a \in \mathbb{R}$, alla lösningar till ekvationssystemet: (6p)

$$\begin{cases} ax - 2y + 2z - 5w &= 0 \\ x + 2y + 2z - 3w &= 1 \\ -x - 2y - z + w &= 0 \end{cases}$$

Lösning. Vi skriver ekvationssystemet i en utvidgad matris och använder Gauss-elimination,

$$\left(\begin{array}{cccc|c} a & -2 & 2 & -5 & 0 \\ 1 & 2 & 2 & -3 & 1 \\ -1 & -2 & -1 & 1 & 0 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 2 & -3 & 1 \\ a & -2 & 2 & -5 & 0 \\ -1 & -2 & -1 & 1 & 0 \end{array}\right)$$
$$\sim \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 2 & -3 & 1 \\ 0 & -2a-2 & 2-2a & 3a-5 & -a \\ 0 & 0 & 1 & -2 & 1 \end{array}\right)$$

I första steget så bytte vi plats på rad 1 och rad 2. I andra steget så adderade vi rad 1 multiplicerad med $-a$ till rad 2 och sedan adderade vi rad 1 multiplicerad med 1 till rad 3.

Vi delar nu upp i två fall:

- Om $a \neq -1$, så får vi genom Gauss-elimination att:

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 2 & -3 & 1 \\ 0 & -2(a+1) & -2(a-1) & 3a-5 & -a \\ 0 & 0 & 1 & -2 & 1 \end{array}\right)$$
$$\sim \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 2 & -3 & 1 \\ 0 & 1 & \frac{a-1}{a+1} & -\frac{3a-5}{2(a+1)} & \frac{a}{2(a+1)} \\ 0 & 0 & 1 & -2 & 1 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & \frac{1}{2} & \frac{2-a}{2(a+1)} \\ 0 & 0 & 1 & -2 & 1 \end{array}\right)$$
$$\sim \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 & -\frac{3}{a+1} \\ 0 & 1 & 0 & \frac{1}{2} & \frac{2-a}{2(a+1)} \\ 0 & 0 & 1 & -2 & 1 \end{array}\right)$$

  I första steget så multiplicerade rad 2 med $-1/(2a+2)$. I andra steget så adderade vi rad 3 multiplicerad med $-(a-1)/(a+1)$ till rad 2 och multiplicerad med -2 till rad 1. I tredje steget så adderade vi rad 2 multiplicerad med -2 till rad 1. Vi har därmed en fri variabel w som vi sätter lika med parametern $t \in \mathbb{R}$. Lösningarna i detta fall blir då $(x, y, z, w) = (-\frac{3}{a+1}, \frac{2-a}{2(a+1)}, 1, 0) + t(0, -\frac{1}{2}, 2, 1)$ för godtyckligt $t \in \mathbb{R}$.

- Om $a = -1$ så får vi genom Gauss-elimination att:

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 2 & -3 & 1 \\ 0 & 0 & 4 & -8 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -2 & 1 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 2 & -3 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -3 \\ 0 & 0 & 1 & -2 & 1 \end{array}\right)$$

där vi adderade vi rad 3 multiplicerad med -4 till rad 2. Ekvationen i rad 2 ger nu en motsägelse och alltså har vi inga lösningar i detta fall.

2. (a) Avgör för vilka värden på det reella talet $a \in \mathbb{R}$ som vektorerna $\bar{u} = (1, a, a)$, $\bar{v} = (-2, 2, 3)$, $\bar{w} = (1, -1, -6)$ är linjärt oberoende. (3p)

Lösning. Vektorerna är linjärt oberoende omm ekvationen $\lambda\bar{u} + \mu\bar{v} + \nu\bar{w} = 0$ där $\lambda, \mu, \nu \in \mathbb{R}$ är variabler, endast har den triviala lösningen $\lambda = \mu = \nu = 0$. Skrivet på matrisform blir ekvationen

$$A \begin{pmatrix} \lambda \\ \mu \\ \nu \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \text{där} \quad A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 \\ a & 2 & -1 \\ a & 3 & -6 \end{pmatrix}.$$

Denna ekvation har endast den triviala lösningen omm $\det(A) = -9(1+a) \neq 0$, dvs omm $a \neq -1$.

(b) Beräkna, för varje värde på det reella talet $a \in \mathbb{R}$, determinanten till matrisen $2 \cdot A^{10}$ där: (3p)

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 \\ a & 2 & -1 \\ a & 3 & -6 \end{pmatrix}.$$

Lösning. Vi har att $\det(2 \cdot A^{10}) = 2^3 \cdot \det(A^{10}) = 2^3 \cdot \det(A)^{10} = 2^3 \cdot 9^{10} \cdot (a+1)^{10}$.

3. Låt p_1 vara planet givet på normalform av $x - 2y + z = -1$ och planet p_2 givet på parameterform av $(1, 1, 1) + s(2, 2, 1) + t(-1, 2, 3)$ där $s, t \in \mathbb{R}$ är parametrar.

(a) Bestäm $a \in \mathbb{R}$ sådant att de tre planen p_1, p_2, p_3 skär varandra i en linje ℓ, där planet p_3 är given på normalform av $-x + y - 3z = a$. (3p)

Lösning. Planet p_2 har en normalvektor

$$(2,2,1)\times(-1,2,3) = (\begin{vmatrix}2 & 2\\ 1 & 3\end{vmatrix}, -\begin{vmatrix}2 & -1\\ 1 & 3\end{vmatrix}, \begin{vmatrix}2 & -1\\ 2 & 2\end{vmatrix}) = (4,-7,6),$$

vilket ger att p_2 på normalform ges av $4x-7y+6z = D$ för något $D \in \mathbb{R}$. Eftersom punkten $(1,1,1)$ ligger på p_2 så har vi att $4-7+6 = D$.
Då gäller att en punkt (x_0, y_0, z_0) ligger på alla tre planen p_1, p_2, p_3 omm

$$\begin{pmatrix}1 & -2 & 1\\ 4 & -7 & 6\\ -1 & 1 & -3\end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix}x_0\\ y_0\\ z_0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-1\\ 3\\ a\end{pmatrix}.$$

Detta skriver vi i en utvidgad matris och använder Gauss-elimination

$$\left(\begin{array}{ccc|c}1 & -2 & 1 & -1\\ 4 & -7 & 6 & 3\\ -1 & 1 & -3 & a\end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c}1 & -2 & 1 & -1\\ 0 & 1 & 2 & 7\\ 0 & -1 & -2 & a-1\end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c}1 & -2 & 1 & -1\\ 0 & 1 & 2 & 7\\ 0 & 0 & 0 & a+6\end{array}\right).$$

I första steget så adderade vi rad 1 multiplicerad med -4 till rad 2 och multiplicerad med 1 till rad 3. I andra steget så adderade vi rad 2 multiplicerad till rad 3. Nu ser vi att om $a \neq -6$ så har ekvationssystemet ingen lösning. Om $a = -6$ så har vi en fri variabel och alltså utgör lösningsmängden en linje.

(b) Bestäm linjen ℓ på parameterform. (3p)

Lösning. Vi sätter $a = -6$ och fortsätter med Gauss-elimination:

$$\left(\begin{array}{ccc|c}1 & -2 & 1 & -1\\ 0 & 1 & 2 & 7\\ 0 & 0 & 0 & 0\end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c}1 & 0 & 5 & 13\\ 0 & 1 & 2 & 7\\ 0 & 0 & 0 & 0\end{array}\right)$$

där vi adderade rad 2 multiplicerad med 2 till rad 1. Vi har en fri variabel z som vi sätter lika med parametern $t \in \mathbb{R}$. Lösningarna blir då $(x,y,z) = (13,7,0) + t(-5,-2,1)$ för godtyckligt $t \in \mathbb{R}$, vilket är linjen ℓ på parameterform.

4. Bestäm avbildningsmatrisen i standardbasen för den linjära avbildningen $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ vilken definieras av att vektorn $\bar{u}$ först avbildas på $\bar{v} \times \bar{u}$ där $\bar{v} = (-1,1,1)$ och därefter speglas i planet $x = y$. (6p)

Lösning. Om $\bar{u} = (a, b, c)$ så är

$$\bar{v}\times\bar{u} = (-1,1,1)\times(a,b,c) = (\begin{vmatrix}1 & b\\ 1 & c\end{vmatrix}, -\begin{vmatrix}-1 & a\\ 1 & c\end{vmatrix}, \begin{vmatrix}-1 & a\\ 1 & b\end{vmatrix}) = (c-b, c+a, -b-a),$$

alltså blir avbildningsmatrisen för denna avbildning i standardbasen lika med

$$A = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 1\\ 1 & 0 & 1\\ -1 & -1 & 0\end{pmatrix}.$$

Om vektorn $\bar{u} = (a, b, c)$ speglas i planet $x = y$ så får vi vektorn (b, a, c) och alltså blir avbildningsmatrisen för denna avbildning i standardbasen lika med

$$B = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0\\ 1 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}.$$

Avbildningsmatrisen för den sammansatta avbildning i standardbasen blir då

$$BA = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1\\ 0 & -1 & 1\\ -1 & -1 & 0\end{pmatrix}.$$

5. (a) Låt $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ vara en avbildning. Ge definitionen av vad det betyder för T att vara en *linjär* avbildning. (2p)

   Lösning. Avbildningen T är linjär omm $T(\lambda\bar{u}) = \lambda T(\bar{u})$ och $T(\bar{u}+\bar{v}) = T(\bar{u}) + T(\bar{v})$ för varje $\lambda \in \mathbb{R}$ och $\bar{u}, \bar{v} \in \mathbb{R}^2$.

   (b) Fixera vektorn $\bar{u} = (1, 0)$. Låt $T_1 : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ definieras genom (2p)

   $$T_1(\bar{v}) = 2\bar{v} + \bar{u}.$$

   Bevisa eller motbevisa att T_1 är en linjär avbildning.

   Lösning. Om $\bar{w}_1 = (1, 0)$ och $\bar{w}_2 = (0, 1)$ så är $T_1(\bar{w}_1 + \bar{w}_2) = 2(\bar{w}_1 + \bar{w}_2) + \bar{u} = (3, 2)$ men $T_1(\bar{w}_1) + T(\bar{w}_2) = 2\bar{w}_1 + \bar{u} + 2\bar{w}_2 + \bar{u} = (4, 2)$. Eftersom dessa inte är lika så följer det att T_1 inte är linjär.

   (c) Fixera igen vektorn $\bar{u} = (1, 0)$. Låt $T_2 : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ definieras genom (2p)

   $$T_2(\bar{v}) = \operatorname{proj}_{\bar{v}}(\bar{u}),$$

   där $\operatorname{proj}_{\bar{v}}(\bar{u})$ betecknar den ortogonala projektionen av $\bar{u}$ på $\bar{v}$. Bevisa eller motbevisa att T_2 är en linjär avbildning.

Lösning. Vi har att $\operatorname{proj}_{\bar{v}}(\bar{u}) = \frac{\bar{u}\cdot\bar{v}}{||\bar{v}||^2}\bar{v}$. Så om $\lambda = 2$ så är $T_2(\lambda\bar{u}) = \frac{\bar{u}\cdot(2\bar{u})}{||2\bar{u}||^2}(2\bar{u}) = \frac{\bar{u}\cdot\bar{u}}{||\bar{u}||^2}\bar{u} = \bar{u}$ men $\lambda T_2(\bar{u}) = 2\frac{\bar{u}\cdot\bar{u}}{||\bar{u}||^2}\bar{u} = 2\bar{u}$. Eftersom dessa inte är lika så följer det att T_2 inte är linjär.