MATEMATISKA INSTITUTIONEN
STOCKHOLMS UNIVERSITET
Avd. Matematik
Examinator: Gregory Arone

Tentamensskrivning i
Linjär algebra, Matematik 1, 5hp
27 maj 2026

Motivera alla lösningar noggrant. Tillåtna hjälpmedel är skrivdon. Max antal poäng på tentan är 30, och 15 skrivningspoäng ger betyg åtminstone E.

Uppgifter.

1. (a) Bestäm om följande mängd vektorer är linjärt oberoende (3p)

$$\begin{bmatrix} 1 \\ -2 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 5 \\ -3 \\ 7 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 6 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix},$$

   (b) $A = \begin{pmatrix} 0 & 5 & -2 \\ 1 & -5 & 4 \\ 3 & 4 & 4 \end{pmatrix}$. Bestäm $\det(A^5)$. (3p)

2. Betrakta följande ekvationssystem, där koefficienterna beror på en parameter a

$$\begin{array}{rcrcrcr} ax & + & 2y & + & 2z & = & 4 \\ -x & + & ay & + & z & = & -1 \\ -x & + & y & + & z & = & 2 \end{array}$$

   (a) Bestäm för vilka a systemet har en unik lösning och skriv en formel för lösningen som en funktion av a. (3p)

   (b) För alla andra värden på a, bestäm mängden av lösningar. (3p)

3. (a) Hitta avståndet mellan linjerna $(2, -1, 3) + t(1, 2, 2)$ och $(1, -2, 0) + t(-2, 1, -1)$ (3p)

   (b) Bestäm ekvationen för linjen som är ortogonal med både linjen i del (a), och passerar genom origo. (3p)

Var god vänd!

4. Från punkten $P = (2,\ -3,\ 1)$ dras normallinjer till de båda planen Π_1 och Π_2 som har ekvationerna $x - y + 5z = 7$ och $y - 2z = 3$. Ett plan Π_3 innehåller de båda normala linjerna.

   (a) Hitta ekvationen för planet Π_3. (3p)

   (b) Bestäm skärningspunkten mellan Π_1, Π_2 och Π_3. (3p)

5. Låt $\bar{u} = (2, 1, -1)$.

   (a) Hitta två nollskilda vektorer $\bar{v}$ och $\bar{w}$ sådant att $\bar{u}, \bar{v}$, och $\bar{w}$ är ortogonala med varandra. (2p)

   (b) Förklara varför mängden $\mathcal{A} = \{\bar{u}, \bar{v}, \bar{w}\}$ bildar en bas för $\mathbb{R}^3$. (2p)

   (c) Hitta koordinaterna av vektorn $(4, 5, 2)$ respektivt basen $\mathcal{A}$. (2p)