

**Motivera alla lösningar noggrant.** Tillåtna hjälpmedel är skrivdon. Max antal poäng på tentan är 30, och 15 skrivningspoäng ger betyg åtminstone E.

**Uppgifter.**

1. (a) Bestäm om följande mängd vektorer är linjärt oberoende (3p)

$$\begin{bmatrix} 1 \\ -2 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 5 \\ -3 \\ 7 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 6 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix},$$

**Svar:** Nej. Fyra vektorer i  $\mathbb{R}^3$  är alltid linjärt beroende.

- (b)  $A = \begin{pmatrix} 0 & 5 & -2 \\ 1 & -5 & 4 \\ 3 & 4 & 4 \end{pmatrix}$ . Bestäm  $\det(A^5)$ . (3p)

**Svar:** Man kan beräkna att  $\det(A) = 2$ , så  $\det(A^5) = \det(A)^5 = 32$ .

2. Betrakta följande ekvationssystem, där koefficienterna beror på en parameter  $a$

$$\begin{aligned} ax + 2y + 2z &= 4 \\ -x + ay + z &= -1 \\ -x + y + z &= 2 \end{aligned}$$

- (a) Bestäm för vilka  $a$  systemet har en unik lösning och skriv en formel för lösningen som en funktion av  $a$ . (3p)

**Svar:** Vi börjar med att beräkna determinanten för koefficientmatrisen.

$$\det \begin{pmatrix} a & 2 & 2 \\ -1 & a & 1 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix} = a(a-1) - 2 \cdot 0 + 2(a-1) = (a+2)(a-1)$$

Var god vänd!

Vi drar slutsatsen att systemet har en unik lösning om och endast om  $a \neq 1, -2$ .

Låt oss anta att  $a \neq 1$  eller  $-2$ , och tillämpa Gaussisk eliminering på den utdvidgade matrisen av koefficienter.

$$\begin{pmatrix} a & 2 & 2 & 4 \\ -1 & a & 1 & -1 \\ -1 & 1 & 1 & 2 \end{pmatrix} \xrightarrow{R1 \leftrightarrow R2} \begin{pmatrix} -1 & a & 1 & -1 \\ a & 2 & 2 & 4 \\ -1 & 1 & 1 & 2 \end{pmatrix} \xrightarrow{\substack{R2 \rightarrow R2 + aR1 \\ R3 \rightarrow R3 - R1}} \begin{pmatrix} -1 & a & 1 & -1 \\ 0 & 2 + a^2 & 2 + a & 4 - a \\ 0 & 1 - a & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{\substack{R2 \rightarrow \frac{1}{2+a^2} R2 \\ \text{OBS: } 2+a^2 \neq 0}} \begin{pmatrix} -1 & a & 1 & -1 \\ 0 & 1 & \frac{2+a}{2+a^2} & \frac{4-a}{2+a^2} \\ 0 & 1-a & 0 & 3 \end{pmatrix} \xrightarrow{R3 - (1-a)R2} \begin{pmatrix} -1 & a & 1 & -1 \\ 0 & 1 & \frac{2+a}{2+a^2} & \frac{4-a}{2+a^2} \\ 0 & 0 & \frac{(a-1)(a+2)}{a^2+2} & \frac{(2a+1)(a+2)}{a^2+2} \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{R3 \rightarrow \frac{a^2+2}{(a-1)(a+2)} R3} \begin{pmatrix} -1 & a & 1 & -1 \\ 0 & 1 & \frac{2+a}{2+a^2} & \frac{4-a}{2+a^2} \\ 0 & 0 & 1 & \frac{2a+1}{a-1} \end{pmatrix}$$

Vi får följande lösning

$$z = \frac{2a+1}{a-1}.$$

$$y = \frac{4-a}{a^2+2} - \frac{a+2}{a^2+2} \cdot \frac{2a+1}{a-1} = \frac{-3}{a-1}$$

$$x = 1 - \frac{3a}{a-1} + \frac{2a+1}{a-1} = 0.$$

Lösningen är  $(x, y, z) = \left(0, \frac{-3}{a-1}, \frac{2a+1}{a-1}\right)$

- (b) För alla andra värden på  $a$ , bestäm mängden av lösningar. (3p)

**Svar:** Nu betraktar vi fallen  $a = 1, -2$ .

Anta att  $a = 1$ . Då får man de följande systemet:

$$\begin{aligned} x + 2y + 2z &= 4 \\ -x + y + z &= -1 \\ -x + y + z &= 2 \end{aligned}$$

Det är klart att den andra och tredje ekvationerna motsäger varandra, och det finns ingen lösning för  $a = 1$ .

Nu anta att  $a = -2$ . Vi får följande system

$$\begin{aligned} -2x + 2y + 2z &= 4 \\ -x - 2y + z &= -1 \\ -x + y + z &= 2 \end{aligned}$$

Det är klart att den första och den tredje ekvationerna är likvärdiga. Systemet förenklas till följande

$$\begin{aligned} x - y - z &= -2 \\ x + 2y - z &= 1 \end{aligned}$$

Om vi subtraherar den första ekvationen från den andra, blir systemet följande

$$\begin{array}{rcl} x & - & y & - & z & = & -2 \\ & & 3y & & & = & 3 \end{array}$$

Man kan låta  $z = t$ , och för varje värde av  $z$ ,  $x$  och  $y$  är bestämda av  $z$  enligt formeln  $y = 1$ ,  $x = -2 + y + z = -1 + t$ .

Slutsatsen är att när  $a = -2$  finns det oändliga många lösningar, och en generell lösning har formen  $(x, y, z) = (-1 + t, 1, t)$ , där  $t$  är ett godtyckligt reellt tal.

3. (a) Hitta avståndet mellan linjerna  $(2, -1, 3) + t(1, 2, 2)$  och  $(1, -2, 0) + t(-2, 1, -1)$  (3p)

**Svar:** En vektor som pekar från en allmän punkt på den första linjen till en allmän punkt på den andra linjen har följande form

$$[(1, -2, 0) + s(-2, 1, -1)] - [(2, -1, 3) + t(1, 2, 2)] = (-1 - 2s - t, -1 + s - 2t, -3 - s - 2t)$$

där  $s$  och  $t$  är godtyckliga reella tal.

Längden av denna vektor minimeras när den är orthogonal med dem riktning vektorerna av båda linjen. D.v.s., den måste vara orthogonal med  $(1, 2, 2)$  och  $(-2, 1, -1)$ . Det menar att vi får följande ekvationer

$$\begin{aligned} 1 \cdot (-1 - 2s - t) + 2 \cdot (-1 + s - 2t) + 2 \cdot (-3 - s - 2t) &= 0 \\ -2 \cdot (-1 - 2s - t) + (-1 + s - 2t) - (-3 - s - 2t) &= 0 \end{aligned}$$

Det förenklas sig till följande ekvationssystem

$$\begin{aligned} -2s - 9t &= 9 \\ 6s + 2t &= -4 \end{aligned}$$

Systemet har lösningen  $s = -\frac{9}{25}$ ,  $t = -\frac{23}{25}$ . Det följer att vektorn som förbinder de två närmaste punkterna på de två linjerna är  $\frac{4}{25}(4, 3, -5)$ .

Längden av denna vektor är  $\frac{4}{5}\sqrt{2}$ , och detta är avståndet mellan linjen.

- (b) Bestäm ekvationen för linjen som är orthogonal med både linjen i del (a), och passerar genom origo. (3p)

**Svar:** Denna linje har riktning vektor som är orthogonal med båda  $(-2, 1, -1)$  och  $(-2, 1, -1)$ . Till exempel, kan man ta vektorn  $(4, 3, -5)$ .

Eftersom linjen passerar genom origo, har ekvationen parametrisk form  $(4t, 3t, -5t)$ , där  $t$  är ett godtyckligt reell tal.

4. Från punkten  $P = (2, -3, 1)$  dras normallinjer till de båda planen  $\Pi_1$  och  $\Pi_2$  som har ekvationerna  $x - y + 5z = 7$  och  $y - 2z = 3$ . Ett plan  $\Pi_3$  innehåller de båda normala linjerna.

(a) Hitta ekvationen för planet  $\Pi_3$ . (3p)

**Svar:** Normal vektorerna till planen  $\Pi_1$  och  $\Pi_2$  är  $(1, -1, 5)$  och  $(0, 1, -2)$ . Båda vektorer är parallella med  $\Pi_3$ . Också, punkten  $(2, -3, 1)$  ligger på  $\Pi_3$ . Det följer att  $\Pi_3$  har parametrisk ekvation

$$(2, -3, 1) + s(1, -1, 5) + t(0, 1, -2) = (2 + s, -3 - s + t, 1 + 5s - 2t)$$

där  $s, t$  är godtyckliga reella tal.

Om man vill att skriva ekvationen i den normala formen, behöver man hitta normalvektorn till  $\Pi_3$ . Den är en vektor som är ortogonal med  $(1, -1, 5)$  och  $(0, 1, -2)$ . Man kan hitta sådant vektor genom att beräkna kross produkten  $(1, -1, 5) \times (0, 1, -2) = (-3, 2, 1)$ . Det följer att  $\Pi_3$  har ekvationen

$$-3x + 2y + z = -3 \cdot 2 + 2 \cdot (-3) + 1 \cdot 1 = -11.$$

Så svaret blir  $\boxed{-3x + 2y + z = -11}$ .

(b) Bestäm skärningspunkten mellan  $\Pi_1, \Pi_2$  och  $\Pi_3$ . (3p)

**Svar:** För att hitta skärningspunkten behöver man lösa följande ekvationssystem

$$\begin{aligned} x - y + 5z &= 7 \\ y - 2z &= 3 \\ -3x + 2y + z &= -11 \end{aligned}$$

Vi adderar tre gånger första ekvationen till den tredje ekvationen och får följande systemet

$$\begin{aligned} x - y + 5z &= 7 \\ y - 2z &= 3 \\ -y + 16z &= 10 \end{aligned}$$

Nu adderar vi den andra ekvationen till den tredje ekvationen och får

$$\begin{aligned} x - y + 5z &= 7 \\ y - 2z &= 3 \\ 14z &= 13 \end{aligned}$$

Detta har lösning  $z = \frac{13}{14}$ ,  $y = \frac{34}{7}$ ,  $x = \frac{101}{14}$ . So svaret är  $\boxed{\left(\frac{101}{14}, \frac{34}{7}, \frac{13}{14}\right)}$

5. Låt  $\bar{u} = (2, 1, -1)$ .

- (a) Hitta två nollskilda vektorer  $\bar{v}$  och  $\bar{w}$  sådant att  $\bar{u}, \bar{v}$ , och  $\bar{w}$  är ortogonala med varandra. (2p)

**Svar:** Det finns många vektorer som är ortogonala med  $(2, 1, -1)$ . Till exempel, kan vi ta  $\bar{v} = (0, 1, 1)$ . För att hitta en vektor  $\bar{w}$  som är ortogonal med båda  $\bar{u}$  och  $\bar{v}$ , ska vi beräkna kross produkten  $\bar{u} \times \bar{v}$ :

$$\bar{u} \times \bar{v} = \det \begin{pmatrix} \bar{e}_1 & \bar{e}_2 & \bar{e}_3 \\ 2 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} = (2, -2, 2)..$$

Vi kan egentligen dividera med 2, och ta  $\bar{w} = (1, -1, 1)$ .

- (b) Förklara varför mängden  $\mathcal{A} = \{\bar{u}, \bar{v}, \bar{w}\}$  bildar en bas för  $\mathbb{R}^3$ . (2p)

**Svar:** En mängd av tre vektorer i  $\mathbb{R}^3$  bildar en bas om och endast om den är linjärt oberoende. Vi visade i klass att en mängd of nollskilda vektorer som är ortogonala med varandra är alltid linjärt oberoende.

- (c) Hitta koordinaterna av vektorn  $(4, 5, 2)$  respektivt basen  $\mathcal{A}$ . (2p)

**Svar:** Vi tar  $\mathcal{A} = \{(2, 1, -1), (0, 1, 1), (1, -1, 1)\}$ . Eftersom den är en ortogonal bas, har vi följande formel som uttrycker vektorn  $(4, 5, 2)$  i bas  $\mathcal{A}$

$$\begin{aligned} (4, 5, 2) &= \frac{(4, 5, 2) \cdot (2, 1, -1)}{(2, 1, -1) \cdot (2, 1, -1)}(2, 1, -1) + \frac{(4, 5, 2) \cdot (0, 1, 1)}{(0, 1, 1) \cdot (0, 1, 1)}(0, 1, 1) + \\ &+ \frac{(4, 5, 2) \cdot (1, -1, 1)}{(1, -1, 1) \cdot (1, -1, 1)}(1, -1, 1) = \frac{11}{6}(2, 1, -1) + \frac{7}{2}(0, 1, 1) + \frac{1}{3}(1, -1, 1). \end{aligned}$$

Koordinaterna av  $(4, 5, 2)$  respektivt basen  $\mathcal{A}$  är  $\left(\frac{11}{6}, \frac{7}{2}, \frac{1}{3}\right)$