MATEMATISKA INSTITUTIONEN
STOCKHOLMS UNIVERSITET
Avd. Matematik
Examinator: Håkan Granath

Tentamensskrivning i
Algebra, Matematik 1, 7.5 hp
den 17 januari 2019

Tillåtna hjälpmedel är skrivdon. Fullständiga och väl motiverade lösningar krävs. Svaren ska framgå tydligt och vara rimligt slutförenklade. Betygsgränser:

Max	30 p	B	24 p	D	18 p
A	27 p	C	21 p	E	15 p

Bonuspoängen från terminens problemsamlingar räknas in under rättningen, **skriv din bonuspoäng** på framsidan av skrivomslaget.

Koordinater förutsätts vara givna med avseende på en högerorienterad ON-bas.

1. (a) Låt $A = \{1, 2, 3, 5\}$, $B = \{2, 3, 5, 6\}$ och $C = \{3, 4, 5, 6\}$. Rita ett Venndiagram för mängderna, där elementen är korrekt utplacerade. Avgör, med tydlig motivering, om följande implikation är sann: (2p)

$$(x \in A \land x \in C) \Rightarrow x \in B.$$

   (b) Bestäm alla lösningar $x \in \mathbb{Z}$ till kongruensen $7x \equiv 1 \pmod{2019}$. (3p)
   Tips: Formulera om problemet som en diofantisk ekvation.

2. (a) Vilken restterm ger talet $33^{91} + 91^{33}$ vid division med 17? (2p)

   (b) Vilken rest fås om polynomet $x^{2019} + 1$ delas med $x^2 + 4$? (3p)

3. (a) En standardkortlek innehåller 52 kort i fyra olika färger, och 13 valörer per färg. En pokerhand innehåller 5 kort.

      i. Hur många pokerhänder har fyrtal, dvs fyra kort av samma valör? (1p)
      ii. Hur många pokerhänder har par, dvs två kort av en valör och tre kort av tre andra valörer? (1p)
      iii. Hur många har tvåpar, dvs precis två kort vardera av två valörer och ett femte kort med en annan valör. (1p)

   Svaren får innehålla binomialkoefficienter.

   (b) Vilken eller vilka av följande utsagor är ekvivalenta med $P \Rightarrow \neg Q$? (2p)

$$A : P \land Q, \qquad B : Q \Rightarrow \neg P, \qquad C : (\neg Q) \Rightarrow P, \qquad D : \neg P \lor \neg Q.$$

   Svaret skall vara tydligt motiverat, t.ex. genom att ange sanningstabellerna för utsagorna.

Var god vänd!

4. Betrakta de fyra punkterna

$$A = (3, 4, 5), \qquad B = (6, 2, 7), \qquad C = (4, 3, 8), \qquad D = (1, 5, 6).$$

   (a) Visa att fyrhörningen $ABCD$ är en parallellogram, bestäm dess area, samt ekvationen för planet fyrhörningen ligger i. (3p)

   (b) Det finns precis en punkt P i xy-planet vars ortogonala projektion på fyrhörningens plan är A. Bestäm punkten P. (2p)

5. Betrakta vektorerna $\vec{f}_1 = (0, 1, a)$, $\vec{f}_2 = (3/5, 0, 4/5)$ och $\vec{f}_3 = (b, c, 3/5)$, där $a, b, c \in \mathbb{R}$.

   (a) När bildar $(\vec{f}_1, \vec{f}_2, \vec{f}_3)$ en bas för rummet? (2p)

   (b) Bestäm (alla möjliga) a, b, c så att $(\vec{f}_1, \vec{f}_2, \vec{f}_3)$ bildar en ON-bas. Ordna vektorerna så att basen dessutom blir positivt orienterad. (3p)

6. Låt T vara den linjära avbildningen som ges av att först spegla i planet $x - z = 0$, sedan rotera 90° moturs kring x-axeln (sett från spetsen av $\vec{e}_1$), och slutligen spegla igen i planet $x - z = 0$.

   (a) Bestäm matrisen för T i standardbasen. (3p)

   (b) Ge en sammanfattande geometrisk tolkning av T och använd denna för att bestämma matrisen för den linjära avbildning som fås om avbildningen T upprepas 50 gånger. (2p)

Tid och plats för skrivningsåterlämning meddelas senare. Efter återlämningen kommer tentorna finnas att hämta hos studentexpeditionen, hus 6, rum 204.