MATEMATISKA INSTITUTIONEN
STOCKHOLMS UNIVERSITET
Avd. Matematik
Examinator: Håkan Granath

Tentamensskrivning i
Algebra, Matematik 1, 7.5 hp
den 8 maj 2019

Tillåtna hjälpmedel är skrivdon. Fullständiga och väl motiverade lösningar krävs. Svaren ska framgå tydligt och vara rimligt slutförenklade. Betygsgränser:

Max	30 p	B	24 p	D	18 p
A	27 p	C	21 p	E	15 p

Bonuspoängen från terminens problemsamlingar räknas in under rättningen, **skriv din bonuspoäng** på framsidan av skrivomslaget.

Koordinater förutsätts vara givna med avseende på en högerorienterad ON-bas.

1. Bestäm alla heltal x med $100 < x < 200$, sådana att $100x \equiv 3 \pmod{43}$. (4p)
   Tips: Lös en lämplig diofantisk ekvation.

2. Polynomet $p(z) = z^5 - 2z^4 + 2z^3 + z^2 - 2z + 2$ har ett nollställe $z = 1 + i$.
   (a) Bestäm alla komplexa nollställen till $p(z)$. (3p)
   (b) Faktorisera $p(z)$ i irreducibla reella faktorer (dvs reella faktorer av så låga gradtal som möjligt). (1p)

3. (a) Visa att $5^{2019} - 8$ är jämnt delbart med 39. (3p)
   (b) Bestäm asymptoterna till hyperbeln $x^2 - 2x - 4y^2 - 8y = 4$, samt skissa grafen. (2p)

4. (a) Om $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$, lös matrisekvationen $XA + 3A = 2E$. (2p)
   (b) Låt M vara mängden $\{1, 2, 3, \ldots, 9\}$
      i. På hur många sätt kan elementen i M ordnas i en följd, så att två udda tal inte hamnar bredvid varandra. (2p)
      ii. Bestäm antalet delmängder $A \subset M$ som innehåller precis 4 element, varav minst ett är jämnt och minst ett är udda. (2p)

   Svaren skall anges uträknade.

Var god vänd!

5. Betrakta linjerna L_1 och L_2, där

$$L_1 : (x, y, z) = (0, 5, 0) + t(1, 2, 1)$$

för $t \in \mathbb{R}$, och L_2 är skärningslinjen för planen $x + y - z = 3$ och $y + z = 2$.

   (a) Avgör hur linjerna ligger i förhållande till varandra, om de är parallella, sammanfallande, skärande eller skeva. (2p)

   (b) Bestäm ekvationen för det plan Π som innehåller z-axeln men som inte skär L_1. (2p)

   (c) Bestäm den ortogonala projektionen av linjen L_1 på planet Π. (2p)
   Ledning: Den ortogonala projektionen av en punkt P ges av ortogonala projektionen av dess ortsvektor $\overrightarrow{OP}$.

6. Avbildningen F har matrisen $A = \frac{1}{5}\begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 \\ 0 & 5 & 0 \\ -2 & 0 & 4 \end{pmatrix}$ i rummets standardbas. (5p)

   Betrakta vektorerna

$$\begin{cases} \vec{e}_1\,' = \frac{1}{\sqrt{5}}(2, 0, 1) \\ \vec{e}_2\,' = \frac{1}{\sqrt{5}}(1, 0, -2) \\ \vec{e}_3\,' = (0, 1, 0). \end{cases}$$

   Visa att $(\vec{e}_1\,', \vec{e}_2\,', \vec{e}_3\,')$ bildar en positivt orienterad ON-bas för rummet, bestäm matrisen för F i denna bas, samt tolka avbildningen geometriskt.

Tid och plats för skrivningsåterlämning meddelas senare. Efter återlämningen kommer tentorna finnas att hämta hos studentexpeditionen, hus 6, rum 204.