Matematiska institutionen
STOCKHOLMS UNIVERSITET

Lösningsskisser till tentamen i Algebra, Matematik I, den 8 maj 2019

1. Vi behöver att $100x - 3 = 43y$ för heltal y, så vi vill lösa den diofantiska ekvationen $100x - 43y = 3$. Vi börjar med Euklides algoritm:

$$\begin{aligned} 100 &= 2 \cdot 43 + 14 \\ 43 &= 3 \cdot 14 + 1 \end{aligned}$$

så $\mathrm{SGD}(100, 43) = 1$ och vi kan lösa hjälpekvationen $100x - 43y = 1$ genom att köra Euklides algoritm baklänges: $1 = 43 - 3 \cdot 14 = 43 - 3 \cdot (100 - 2 \cdot 43) = 7 \cdot 43 - 3 \cdot 100$. Vi får att $(x, y) = (-3, -7)$ är en partikulärlösning till hjälpekvationen. Multipliceras denna med 3 fås en partikulärlösning till vår ekvation, så den allmänna lösningen ges därmed av

$$\begin{cases} x = -9 + 43k \\ y = -21 + 100k \end{cases} \qquad \text{för } k \in \mathbb{Z}.$$

Villkoret $100 < x < 200$ ger att $3 \leq k \leq 4$, vilket ger lösningarna $x = 120$ och $x = 163$.

2. (a) Eftersom $p(z)$ har reella koefficienter, kommer även konjugatet $z = 1 - i$ att vara ett nollställe, så $(z - (1+i))(z - (1-i)) = z^2 - 2z + 2$ är en faktor i $p(z)$. Polynomdivision ger

$$p(z) = (z^2 - 2z + 2)(z^3 + 1).$$

Vi vill därför lösa $z^3 + 1 = 0$. Uppenbarligen är $z = -1$ en lösning, vilket ger $z^3 + 1 = (z+1)(z^2 - z + 1)$. Löser man $z^2 - z + 1 = 0$, t.ex. genom kvadratkomplettering, fås de 2 sista lösningarna. Svar: $z_1 = -1$, $z_{2,3} = 1 \pm i$, $z_{4,5} = \frac{1 \pm \sqrt{3}\, i}{2}$.

(b) Från (a) har vi $p(z) = (z+1)(z^2 - z + 1)(z^2 - 2z + 2)$, där de två andragradsfaktorerna är irreducibla över $\mathbb{R}$ eftersom de har komplexa rötter.

3. (a) Eftersom primtalsfaktoriseringen av 39 är $3 \cdot 13$, räcker det att visa att talet är delbart med 3 och 13. Moduliräkning ger att

$$5^{2019} - 8 \equiv (-1)^{2019} - 8 = -1 - 8 \equiv 0 \pmod{3},$$

och eftersom Fermats lilla sats ger att $5^{12} \equiv 1 \pmod{13}$ så får vi

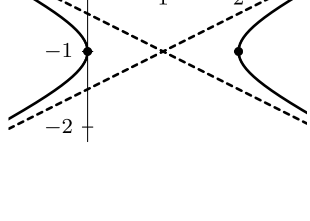
$$5^{2019} - 8 = 5^{12 \cdot 168 + 3} - 8 \equiv 1^{168} 5^3 - 8 = 125 - 8 \equiv 0 \pmod{13},$$

vilket därmed visar påståendet.

(b) Kvadratkomplettering ger den ekvivalenta ekvationen

$$(x-1)^2 - 4(y+1)^2 = 1.$$

Från denna form ser vi enkelt 2 punkter $(x, y) = (1 \pm 1, -1)$, och att asymptoterna ges av $2(y+1) = \pm(x-1)$, dvs $y = (x-3)/2$ respektive $y = -(x+1)/2$. Vi skissar grafen:



4. (a) $XA+3A=2E \iff X=(2E-3A)A^{-1}$. Med standardmetoden beräknas $A^{-1}=\begin{pmatrix}0 & 1\\ 1 & -1\end{pmatrix}$, och vi får $X=\begin{pmatrix}-1 & -3\\ -3 & 2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0 & 1\\ 1 & -1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-3 & 2\\ 2 & -5\end{pmatrix}$.

(b) i. Eftersom det finns 5 udda tal men bara 4 jämna, så måste följden av udda (U) och jämna (J) tal vara UJUJUJUJU. De 5 udda talen kan ordnas på 5! sätt, de jämna på 4! sätt. Antalet ordningsföljder är därmed $5!\cdot 4! = 120\cdot 24 = 2\,880$.

ii. Antalet delmängder med 4 element är $\binom{9}{4}$. Av dessa är $\binom{5}{4}$ med bara udda element, och $\binom{4}{4}$ med bara jämna element förbjudna. Vi får alltså $\binom{9}{4}-\binom{5}{4}-\binom{4}{4}=126-5-1=120$ tillåtna delmängder.

5. (a) Löser vi ekvationssystemet med planets ekvationer får vi att L_2 ges av $(x,y,z)=(1,2,0)+s(2,-1,1)$, för $s\in\mathbb{R}$. Alltså är $\vec{v}_1=(1,2,1)$ en riktningsvektor för L_1 och $\vec{v}_2=(2,-1,1)$ en riktningsvektor för L_2. Dessa är inte parallella, så linjerna är skärande eller skeva. Letar vi efter skärningspunkter genom att lösa

$$(0,5,0)+t(1,2,1)=(1,2,0)+s(2,-1,1)$$

får vi $t=s=-1$, så linjerna skär varandra i punkten $(-1,3,-1)$.

(b) Planet Π är parallellt med $\vec{e}_3$ och $\vec{v}_1$, så en normalvektor $\vec{n}$ fås av

$$\vec{n}=\vec{e}_3\times\vec{v}_1=\begin{vmatrix}0 & 1 & \vec{e}_1\\ 0 & 2 & \vec{e}_2\\ 1 & 1 & \vec{e}_3\end{vmatrix}=-2\vec{e}_1+\vec{e}_2=(-2,1,0).$$

Planet Π har därför ekvationen $-2(x-0)+(y-0)+0(z-0)=0$, dvs $2x-y=0$.

(c) Projektionen på Π av punkten $P=(0,5,0)\in L_1$ är en punkt Q som ges av

$$\overrightarrow{OQ}=\overrightarrow{OP}-\mathrm{Proj}_{\vec{n}}(\overrightarrow{OP})=\overrightarrow{OP}-\frac{\overrightarrow{OP}\cdot\vec{n}}{|\vec{n}|^2}\vec{n}=(0,5,0)-\frac{5}{5}(-2,1,0)=(2,4,0).$$

Projektionen av L_1 är därmed $(x,y,z)=(2,4,0)+t(1,2,1)$.

6. Basbytesmatrisen $Q=\frac{1}{\sqrt{5}}\begin{pmatrix}2 & 1 & 0\\ 0 & 0 & \sqrt{5}\\ 1 & -2 & 0\end{pmatrix}$ är ortogonal, ty

$$Q^TQ=\frac{1}{5}\begin{pmatrix}2 & 0 & 1\\ 1 & 0 & -2\\ 0 & \sqrt{5} & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}2 & 1 & 0\\ 0 & 0 & \sqrt{5}\\ 1 & -2 & 0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}=E.$$

Vidare är

$$\det(Q)=1>0,$$

så basen är positivt orienterad. Avbildningsmatrisen i den nya basen är

$$A'=Q^{-1}AQ=Q^TAQ=\begin{pmatrix}0 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}.$$

Avbildningen är därmed projektion på ett plan med normalvektor $\vec{e}_1{}'$, dvs projektion på planet $2x+z=0$.