Matematiska institutionen
STOCKHOLMS UNIVERSITET

Lösningsskisser till tentamen i Algebra, Matematik I, den 10 juni 2019

1. (a) Vi börjar med Euklides algoritm:

$$\begin{aligned} 31 &= 1 \cdot 23 + 8 \\ 23 &= 2 \cdot 8 + 7 \\ 8 &= 1 \cdot 7 + 1 \end{aligned}$$

så $\mathrm{SGD}(23, 31) = 1$ och vi kan lösa hjälpekvationen $23x + 31y = 1$ genom att köra Euklides algoritm baklänges: $1 = 8 - 1 \cdot 7 = 8 - 1 \cdot (23 - 2 \cdot 8) = 3 \cdot 8 - 1 \cdot 23 = 3 \cdot (31 - 1 \cdot 23) - 1 \cdot 23 = 3 \cdot 31 - 4 \cdot 23$. Vi får att $(x, y) = (-4, 3)$ är en partikulärlösning till hjälpekvationen. Multipliceras denna med 1400 fås en partikulärlösning till vår ekvation, så den allmänna lösningen ges därmed av

$$\begin{cases} x = -5600 + 31k \\ y = 4200 - 23k \end{cases} \qquad \text{för } k \in \mathbb{Z}.$$

(b) Lösningarna (x, y) uppfyller $x + y = -1400 + 8k \equiv 0 \pmod 8$.

(c) Villkoren $x, y > 0$ ger att $\frac{5600}{31} < k < \frac{4200}{23}$, så $180 + \frac{20}{31} < k < 182 + \frac{14}{23}$ vilket ger att $k = 181$ eller $k = 182$. Svar: $(x, y) = (11, 37)$ eller $(x, y) = (42, 14)$.

2. (a) Moduliräkning ger att

$$\begin{aligned} 56^{999} + 33^{40} &\equiv (-1)^{999} + (-5)^{40} = -1 + 5^{40} = -1 + (5^{18})^2 5^4 \equiv -1 + (1)^2 5^4 \\ &= -1 + 25^2 \equiv -1 + 6^2 = 35 \equiv 16 \pmod{19}, \end{aligned}$$

där vi använt att Fermats lilla sats ger att $5^{18} \equiv 1 \pmod{19}$. Svar: Resten är 16.

(b)

P	Q	$P \Rightarrow \neg Q$	$(Q \wedge \neg P) \Rightarrow P$	$(Q \wedge P) \vee (\neg P)$
S	S	F	S	S
S	F	S	S	F
F	S	S	F	S
F	F	S	S	S

(c) Eftersom SOMMARLOV har 9 bokstäver, varav 2 dubbletter, fås enligt välkänd princip $\frac{9!}{(2!)^2} = 90\,720$ ord. Om vi för andra delfrågan börjar med att beräkna antalet "förbjudna" ord får vi 5 byggstenar: SLARV, O, O, M, M, som enligt samma princip som kan ordnas på $\frac{5!}{(2!)^2} = 30$ sätt. Vi får alltså kvar $\frac{9!}{(2!)^3} - 30 = 90\,690$ ord.

3. Upprepad användning av konjugatregeln ger omedelbart

$$p(z) = (z - \sqrt{2})(z + \sqrt{2})(z^2 + 2)(z^4 + 4)$$

vilket direkt ger fyra nollställen $z = \pm\sqrt{2}$ och $z = \pm\sqrt{2}\,i$. Återstår att hitta lösa ekvationen $z^4 + 4 = 0$, dvs $z^4 = -4$. Ansätter vi lösningen på polär form $z = re^{\theta i}$ fås $r^4 e^{4\theta i} = 4e^{\pi i}$. Vi behöver alltså $r^4 = 4$ och $4\theta = \pi + 2\pi n$ för $n \in \mathbb{Z}$. Vilket ger $r = \sqrt{2}$ och $\theta = \frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{2} n$. Sätter vi in $n = 1, 2, 3, 4$ fås lösningarna $z = \pm 1 \pm i$. Parar vi ihop konjugerade nollställen får vi

$$z^4 + 4 = \Big((z - 1 - i)(z - 1 + i)\Big)\Big((z + 1 + i)(z + 1 - i)\Big) = (z^2 - 2z + 2)(z^2 + 2z + 2).$$

Nollställena är alltså $z = \pm\sqrt{2},\ \pm\sqrt{2}\,i,\ \pm 1 \pm i$ och faktoriseringen

$$p(z) = (z - \sqrt{2})(z + \sqrt{2})(z^2 + 2)(z^2 - 2z + 2)(z^2 + 2z + 2).$$

4. (a) Vi får

$$\vec{f}_2 = \overrightarrow{MP} = \overrightarrow{AP} - \overrightarrow{AM} = \frac{1}{2}\vec{e}_2 - \frac{1}{2}\vec{e}_1$$

och

$$\vec{f}_1 = \overrightarrow{MN} = \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{BN} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AB} + \frac{2}{3}\overrightarrow{BC} = \frac{1}{2}\vec{e}_1 + \frac{2}{3}(\vec{e}_2 - \vec{e}_1) = -\frac{1}{6}\vec{e}_1 + \frac{2}{3}\vec{e}_2$$

så $\begin{pmatrix}\vec{f}_1 & \vec{f}_2\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\vec{e}_1 & \vec{e}_2\end{pmatrix} A$, där $A = \frac{1}{6}\begin{pmatrix}-1 & -3\\ 4 & 3\end{pmatrix}$. Därmed är $\begin{pmatrix}\vec{e}_1 & \vec{e}_2\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\vec{f}_1 & \vec{f}_2\end{pmatrix} A^{-1}$. Med (valfri) standardmetod får vi att $A^{-1} = \begin{pmatrix}2 & 2\\ -8/3 & -2/3\end{pmatrix}$ så $\vec{e}_1 = 2\vec{f}_1 - \frac{8}{3}\vec{f}_2$ och $\vec{e}_2 = 2\vec{f}_1 - \frac{2}{3}\vec{f}_2$

(b) Om vektorn $\vec{v}$ har koordinatmatrisen $X = \begin{pmatrix}1\\ 2\end{pmatrix}$ i basen $(\vec{e}_1, \vec{e}_2)$ så har $\vec{v}$ koordinatmatrisen $Y = A^{-1}X = \begin{pmatrix}6\\ -4\end{pmatrix}$ i basen $(\vec{f}_1, \vec{f}_2)$.

5. (a) Löser vi ekvationssystemet med planets ekvationer får vi att L ges av $(x, y, z) = (-4, 5, 0) + t(1, -2, 1)$, för $t \in \mathbb{R}$. Alltså är $R = (-4, 5, 0)$ en punkt på L och $\vec{v} = (1, -2, 1)$ dess riktningsvektor. Vi har $\overrightarrow{RP} = (5, -2, 3)$. Om Q är den punkt på L som är närmast P så är

$$\overrightarrow{RQ} = \mathrm{Proj}_{\vec{v}}(\overrightarrow{RP}) = \frac{\overrightarrow{RP} \cdot \vec{v}}{|\vec{v}|^2}\vec{v} = \frac{5+4+3}{6}\vec{v} = 2\vec{v} = (2, -4, 2)$$

så $\overrightarrow{OQ} = \overrightarrow{OR} + \overrightarrow{RQ} = (-2, 1, 2)$. Svar: $Q = (-2, 1, 2)$.

(b) Om Q är den punkt på planet som är närmast P så måste $\overrightarrow{QP} = (3, 2, 1)$ vara en normalvektor till planet. Dess ekvation är därmed $3(x-(-4)) + 2(y-5) + 1(z-0) = 0$, dvs $3x + 2y + z + 2 = 0$.

6. (a) Planets normalvektor är $\vec{n} = (\sqrt{3}, 1)$. Geometriskt ser vi att speglingen $S(\vec{v})$ av en vektor $\vec{v} = (x, y)$ ges av

$$S(\vec{v}) = \vec{v} - 2\mathrm{Proj}_{\vec{n}}(\vec{v}) = \vec{v} - 2\frac{\vec{v} \cdot \vec{n}}{|\vec{n}|^2}\vec{n} = \vec{v} - \frac{\sqrt{3}\,x + y}{2}\vec{n}.$$

Detta ger $S(\vec{v}) = \frac{1}{2}(-x - \sqrt{3}\,y, -\sqrt{3}\,x + y)$, från vilket vi får att S har matrisen $A = \frac{1}{2}\begin{pmatrix}-1 & -\sqrt{3}\\ -\sqrt{3} & 1\end{pmatrix}$. Spegling i y-axeln avbildar $\vec{e}_1$ på $-\vec{e}_1$ och $\vec{e}_2$ på $\vec{e}_2$ så den har matrisen $B = \begin{pmatrix}-1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}$. Därmed har T matrisen $BA = \begin{pmatrix}1/2 & \sqrt{3}/2\\ -\sqrt{3}/2 & 1/2\end{pmatrix}$.

(b) Vi ser att T har matrisen $\begin{pmatrix}\cos\theta & -\sin\theta\\ \sin\theta & \cos\theta\end{pmatrix}$ för $\theta = -\pi/3$, så T är en rotation vinkeln $\pi/3$ medurs. Avbildningen T^n är därför medurs rotation vinkeln $n\frac{\pi}{3} = \frac{n}{6}2\pi$, så det minsta positiva n som ger identitetsavbildningen är $n = 6$.