Matematiska institutionen
STOCKHOLMS UNIVERSITET

Lösningsskisser till tentamen i Algebra, Matematik I, den 10 januari 2022

1. (a) $|X \cup Y| = |X| + |Y| - |X \cap Y|$ så $21 = |X| + 16 - 7$ vilket ger $|X| = 12$. Vidare är $|X \setminus Y| = |X| - |X \cap Y| = 12 - 7 = 5$.

   (b) Antalet ord som kan bildas av de 9 bokstäverna är enligt välkänd princip $\frac{9!}{2!3!4!} = 1\,260$. De "förbjudna" orden får vi av de 6 byggstenarna ABBA, B, C, C, C, C som kan ordnas på $\frac{6!}{1!1!4!} = 30$ sätt. Vi får alltså kvar $1\,260 - 30 = 1\,230$ tillåtna ord.

2. (a) Det är uppenbart att talet inte delas av 2 (eftersom det är udda) eller av 3 (bara ena termen är delbar med 3). Modulo 5 får vi

$$2^{50} + 3 = 4^{25} + 3 \equiv (-1)^{25} + 3 = 2 \pmod 5$$

   så talet är inte heller delbart med 5. Modulo 7 får vi däremot

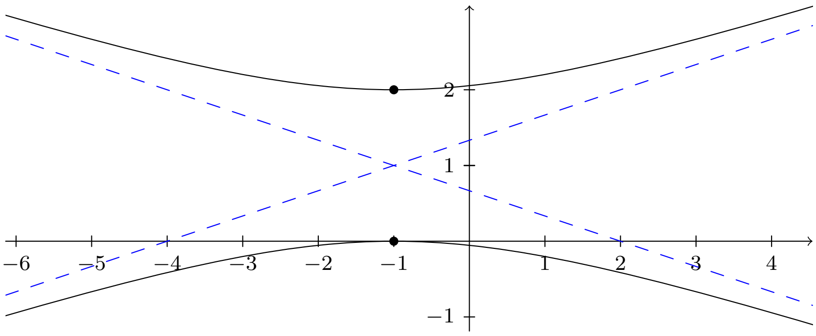
$$2^{50} + 3 = 2^{3\cdot 16+2} + 3 = 8^{16}2^2 + 3 \equiv 1^{16}4 + 3 = 7 \equiv 0 \pmod 7,$$

   så talet är delbart med 7, vilket alltså är den minsta primtalsdelaren.

   (b) Kvadratkomplettering ger den ekvivalenta ekvationen

$$\frac{(x+1)^2}{3^2} - \frac{(y-1)^2}{1^2} = -1.$$

   Från denna form ser vi enkelt 2 punkter $(x, y) = (-1, 1 \pm 1)$, och att asymptoterna ges av $y - 1 = \pm\frac{x+1}{3}$, dvs $y = \frac{4+x}{3}$ respektive $y = \frac{2-x}{3}$. Vi skissar grafen:



3. (a) Enligt restsatsen är resten $p(-i) = (-i)^5 + 2(-i)^4 + 4(-i)^3 - 8(-i)^2 - 16(-i) - 32 = i + 2 + 4i + 8 + 16i - 32 = -22 + 19i$.

   (b) Polynomet $p(z)$ har reella koefficienter så även konjugatet $z = -1 - \sqrt{3}\,i$ är en rot, så polynomet delas av $(z - (-1 + \sqrt{3}\,i))(z - (-1 - \sqrt{3}\,i)) = z^2 + 2z + 4$. Polynomdivision ger $p(z) = (z^2 + 2z + 4)(z^3 - 8)$. Vi behöver nu lösa ekvationen $z^3 - 8 = 0$. Man ser direkt att $z = 2$ är en rot, och får faktoriseringen $z^3 - 8 = (z - 2)(z^2 + 2z + 4)$. Vi får alltså att den sökta faktoriseringen är $p(z) = (z - 2)(z^2 + 2z + 4)^2$, och nollställena är alltså enkelroten $z = 2$ och de två dubbelrötterna $z = -1 \pm \sqrt{3}\,i$.

4. (a) Vi får att $\overrightarrow{AB} = (1, -1, -1)$, $\overrightarrow{AC} = (1, 2, 0)$ och $\overrightarrow{AD} = (0, 3, 1)$ så

$$\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD}$$

   vilket visar att $ABCD$ är en parellellogram. Arean ges av $|\vec{n}|$ där

$$\vec{n} = \overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AD} = \begin{vmatrix} 1 & -1 & \vec{e}_1 \\ -1 & 2 & \vec{e}_2 \\ -1 & 3 & \vec{e}_3 \end{vmatrix} = 2\vec{e}_1 - \vec{e}_2 + 3\vec{e}_3 = (2, -1, 3).$$

   Därmed är arean $\sqrt{2^2 + (-1)^2 + 3^2} = \sqrt{14}$. Vi har att $\vec{n}$ är planets normal, så dess ekvationen är $2(x-1) - 1(y-3) + 3(z-2) = 0$ vilket är ekvivalent med $2x - y + 3z = 5$.

(b) Vi söker först skärningspunkten P mellan linjen och planet. Med $(x, y, z) = (3+t, 4-t, 5+3t)$ i planets ekvation får vi $2(3+t)-(4-t)+3(5+3t) = 5$, vilket ger att $t = -1$, så vi får skärningspunkten $P = (2, 5, 2) = C$. Linjen skär alltså fyrhörningen, närmare bestämt i hörnet C.

5. (a) Vi får

$$\vec{f}_1 = \overrightarrow{ED}+\overrightarrow{DA} = \frac{1}{3}\overrightarrow{CD}-\frac{1}{2}\vec{e}_1 = \frac{1}{3}(\overrightarrow{AD}-\overrightarrow{AC})-\frac{1}{2}\vec{e}_1 = \frac{1}{3}\left(\frac{1}{2}\vec{e}_1 - \vec{e}_2\right)-\frac{1}{2}\vec{e}_1 = -\frac{1}{3}\vec{e}_1-\frac{1}{3}\vec{e}_2$$

och

$$\vec{f}_2 = \vec{f}_1 + \vec{e}_1 = \frac{2}{3}\vec{e}_1 - \frac{1}{3}\vec{e}_2$$

så $\begin{pmatrix}\vec{f}_1 & \vec{f}_2\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\vec{e}_1 & \vec{e}_2\end{pmatrix} M$, där $M = \frac{1}{3}\begin{pmatrix}-1 & 2\\ -1 & -1\end{pmatrix}$. Därmed är $\begin{pmatrix}\vec{e}_1 & \vec{e}_2\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\vec{f}_1 & \vec{f}_2\end{pmatrix} M^{-1}$.

Med (valfri) standardmetod får vi att $M^{-1} = \begin{pmatrix}-1 & -2\\ 1 & -1\end{pmatrix}$ så $\vec{e}_1 = -\vec{f}_1 + \vec{f}_2$ och $\vec{e}_2 = -2\vec{f}_1 - \vec{f}_2$.

Om vektorn $\vec{v}$ har koordinatmatrisen $X = \begin{pmatrix}2\\ 1\end{pmatrix}$ i basen $(\vec{e}_1, \vec{e}_2)$ så har $\vec{v}$ koordinatmatrisen $Y = M^{-1}X = \begin{pmatrix}-4\\ 1\end{pmatrix}$ i basen $(\vec{f}_1, \vec{f}_2)$.

(b) Vi har $\overrightarrow{EA} = \vec{f}_1$, $\overrightarrow{EB} = \vec{f}_2$ och $\overrightarrow{EC} = \vec{f}_1 + \vec{e}_2 = -\vec{f}_1 - \vec{f}_2$, så i koordinatsystemet har vi $A = (1, 0)$, $B = (0, 1)$ och $C = (-1, -1)$.

6. (a) Från linjens ekvation får vi att den har en riktningsvektor $\vec{v} = (1, -2, 2)$. Speglingen av en vektor $\vec{u} = (x, y, z)$ i linjen ges av

$$\begin{aligned} S(\vec{u}) &= 2\mathrm{Proj}_{\vec{v}}(\vec{u}) - \vec{u} = 2\frac{\vec{u}\cdot\vec{v}}{|\vec{v}|^2}\vec{u} - \vec{u} = 2\frac{x-2y+2z}{9}(1, -2, 2) - (x, y, z)\\ &= \frac{1}{9}(-7x - 4y + 4z, -4x - y - 8z, 4x - 8y - z) \end{aligned}$$

så matrisen är $A = \frac{1}{9}\begin{pmatrix}-7 & -4 & 4\\ -4 & -1 & -8\\ 4 & -8 & -1\end{pmatrix}$.

(b) Speglingen T är sin egen invers, så T^{-1} har också matrisen A. Speglingen S uppfyller $S(\vec{e}_1) = \vec{e}_1$, $S(\vec{e}_2) = -\vec{e}_2$, $S(\vec{e}_3) = \vec{e}_3$, så S har matrisen $B = \begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & -1 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}$, varför $S \circ T^{-1}$ har matrisen $BA = \frac{1}{9}\begin{pmatrix}-7 & -4 & 4\\ 4 & 1 & 8\\ 4 & -8 & -1\end{pmatrix}$.