Matematiska institutionen
STOCKHOLMS UNIVERSITET

Lösningsskisser till tentamen i Algebra, Matematik I, den 2 mars 2022

1. (a) Vi börjar med Euklides algoritm:

$$\begin{aligned} 51 &= 1 \cdot 31 + 20 \\ 31 &= 1 \cdot 20 + 11 \\ 20 &= 1 \cdot 11 + 9 \\ 11 &= 1 \cdot 9 + 2 \\ 9 &= 4 \cdot 2 + 1 \end{aligned}$$

så $\mathrm{SGD}(51, 31) = 1$ och vi kan lösa hjälpekvationen

$$31x + 51y = 1 \tag{1}$$

genom att köra Euklides algoritm baklänges: $1 = 9 - 4 \cdot 2 = 9 - 4 \cdot (11 - 1 \cdot 9) = 5 \cdot 9 - 4 \cdot 11 = 5 \cdot (20 - 1 \cdot 11) - 4 \cdot 11 = 5 \cdot 20 - 9 \cdot 11 = 5 \cdot 20 - 9 \cdot (31 - 1 \cdot 20) = 14 \cdot 20 - 9 \cdot 31 = 14 \cdot (51 - 1 \cdot 31) - 5 \cdot 20 = 31 \cdot (-23) + 51 \cdot 14$. Vi får att $(x, y) = (-23, 14)$ löser hjälpekvationen (1). Multipliceras denna lösning med 3 fås en partikulärlösning $(x, y) = (-69, 42)$ till vår ekvation, så den allmänna lösningen ges därmed av

$$\begin{cases} x = -69 + 51k \\ y = 42 - 31k \end{cases}$$

för $k \in \mathbb{Z}$.

(b) Villkoret $|y| < 31$ ger $-31 < 42 - 31k < 31$ som har lösningarna $k = 1, 2$, vilket insatt i lösningsformeln ger $(x, y) = (-18, 11)$ samt $(x, y) = (33, -20)$.

2. (a) Primtalsfaktoriseringen av 22 är $2 \cdot 11$, så räcker det att visa att talet är delbart med 2 och 11. Talet är delbart med 2 eftersom båda termerna är udda. Enligt Fermats lilla sats får vi $3^{10} \equiv 1 \pmod{11}$, så

$$3^{103} - 5 = 3^{10 \cdot 10 + 3} - 5 = (3^{10})^{10} 3^3 - 5 \equiv 1^{10} 27 - 5 = 22 \equiv 0 \pmod{11},$$

vilket därmed visar påståendet.

(b) Kvadratkompletterar vi ekvationen fås $\left(x - \frac{a}{2}y\right)^2 + \left(a - \frac{a^2}{4}\right) y^2 = 1$, så vi får en ellips om och endast om $a - \frac{a^2}{4} > 0$, dvs då $a(4 - a) > 0$. Man ser enkelt att detta är uppfyllt precis då $0 < a < 4$.

3. (a) Vi får att $\overrightarrow{PQ} = (2, 1, 1)$, $\overrightarrow{PR} = (3, -1, 1)$. En normalvektor ges av

$$\vec{n} = \overrightarrow{PQ} \times \overrightarrow{PR} = \begin{vmatrix} 2 & 3 & \vec{e}_1 \\ 1 & -1 & \vec{e}_2 \\ 1 & 1 & \vec{e}_3 \end{vmatrix} = 2\vec{e}_1 + \vec{e}_2 - 5\vec{e}_3 = (2, 1, -5).$$

Planets ekvation är därmed $2(x - 0) + (y - 1) - 5(z - 0) = 0$, dvs $2x + y - 5z = 1$.

(b) Triangelns arean ges av $\frac{1}{2}|\overrightarrow{PQ} \times \overrightarrow{PR}| = \frac{1}{2}\sqrt{2 + 1^2 + (-5)^2} = \sqrt{30}/2$.

Vi får att $\overrightarrow{QP} = (-2, -1, -1)$ och $\overrightarrow{QR} = (1, -2, 0)$ så $\overrightarrow{QP} \cdot \overrightarrow{QR} = 0$ vilket visar att vinkeln vid Q är rät.

4. Sätter vi $z = bi$, med $b \in \mathbb{R}$, får vi $p(z) = (b^4 - 7b^2 + 10) + i(2b^3 - 20b)$, som är noll om och endast om

$$\begin{cases} b^4 - 7b^2 + 10 = 0 \\ 2b(b^2 - 5) = 0. \end{cases}$$

Den andra av dessa ekvationer ger att $b = 0$ eller $b = \pm\sqrt{5}$, varav bara de senare uppfyller den första ekvationen. Vi har alltså att $z = \pm\sqrt{5}\,i$ löser $p(z) = 0$. Därmed är $z^2 + 5$ en delare till $p(z)$, och polynomdivision ger att $p(z) = (z^2 + 5)(z^2 - 2z + 2)$. De övriga läsningarna ges av $z^2 - 2z + 2 = 0 \Leftrightarrow (z - 1)^2 = -1$, så $z = 1 \pm i$. Svar: $z_{1,2} = \pm\sqrt{5}\,i$ och $z_{3,4} = 1 \pm i$.

5. Vi avläser att $\vec{v}_1 = (3, 1, -1)$ är en riktningsvektor för L_1. Sätter vi $A = (3, 0, 6)$ och $B = (3, 1, 7)$, har vi att en riktningsvektor för L_2 ges av $\vec{v}_2 = \overrightarrow{AB} = (0, 1, 1)$, så L_2 ges av $(x, y, z) = (3, 0, 5) + s(0, 1, 1),\ s \in \mathbb{R}$.

   Vi söker nu de punkter $P = (4+3t, 2+t, -t) \in L_1$ och $Q = (3, s, 6+s) \in L_2$ som minimerar avståndet. Detta inträffar då $\overrightarrow{PQ}$ är ortogonal mot linjernas riktningsvektorer. Eftersom $\overrightarrow{PQ} = (-1 - 3t, s - 2 - t, 6 + t + s)$ får vi

$$\begin{cases} 0 = \overrightarrow{PQ} \cdot \vec{v}_1 = -11 - 11t \\ 0 = \overrightarrow{PQ} \cdot \vec{v}_2 = 4 + 2s, \end{cases}$$

   som ger att $t = -1$ och $s = -2$. Därmed är de två närmaste punkterna $P = (1, 1, 1)$ resp. $Q = (3, -2, 4)$, och avståndet mellan linjerna är $|\overrightarrow{PQ}| = |(2, -3, 3)| = \sqrt{22}$.

6. (a) Basbytesmatrisen är $Q = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{2}{\sqrt{6}} & 0 \\ \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{-1}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{-1}{\sqrt{6}} & \frac{-1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}$. En direkt uträkning ger att $Q^T Q = E$ så Q är ortogonal. Vidare får vi att

$$\det(Q) = \frac{1}{6}\begin{vmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & -1 \end{vmatrix} = \frac{1}{6}\begin{vmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \\ 2 & -2 & 0 \end{vmatrix} = -\frac{1}{6}\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 2 & -2 \end{vmatrix} = 1 > 0,$$

   så basen är positivt orienterad.

   (b) Avbildningsmatrisen A' för F i den nya basen är

$$A' = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos(\pi) & -\sin(\pi) \\ 0 & \sin(\pi) & \cos(\pi) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

   Sambandet mellan A' och avbildningsmatrisen A i standardbasen ges av $A' = Q^{-1}AQ$, så den sökta avbildningsmatrisen är

$$A = QA'Q^{-1} = QA'Q^T = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} -1 & 2 & 2 \\ 2 & -1 & 2 \\ 2 & 2 & -1 \end{pmatrix}.$$