MATEMATISKA INSTITUTIONEN
STOCKHOLMS UNIVERSITET
Avd. Matematik
Examinator: Håkan Granath

Tentamensskrivning i
Algebra, Matematik 1, 7.5 hp
den 9 juni 2022

Tillåtna hjälpmedel är skrivdon. Fullständiga och väl motiverade lösningar krävs. Svaren ska framgå tydligt och vara rimligt slutförenklade. Betygsgränser:

Max	30 p	B	24 p	D	18 p
A	27 p	C	21 p	E	15 p

Bonuspoängen från terminens problemsamlingar räknas in under rättningen.

Koordinater förutsätts vara givna med avseende på en högerorienterad ON-bas.

1. (a) Bestäm SGD(14 154, 34 374), samt det minsta positiva heltal x som uppfyller (3p)
$$14\,154x \equiv 0 \pmod{34\,374}.$$
   (b) Bestäm mängden $M = A^c \cap (B \cup C)$, där A, B och C är intervallen $A = (1, \infty)$, $B = (-2, 0)$, $C = [-1, 2]$. (2p)

2. (a) Bestäm medelpunkt och halvaxlar och brännpunkter för ellipsen (2p)
$$3x^2 - 6x + 4y^2 + 8y = 5,$$
och skissa grafen.
   (b) Hur många 4-siffriga PIN-koder finns det med
      i. bara udda siffror (1p)
      ii. med minst en udda och minst en jämn siffra? (1p)
      iii. med precis 2 udda siffror? (1p)

   Svaren skall anges uträknade.

3. Betrakta en given godtycklig triangel $\triangle ABC$. Låt D vara punkten på sträckan AB uppfyller $2|\overrightarrow{AD}| = |\overrightarrow{DB}|$, och låt E vara mittpunkt på sidan AC. Betrakta baserna $(\vec{e}_1, \vec{e}_2) = (\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC})$ och $(\vec{f}_1, \vec{f}_2) = (\overrightarrow{ED}, \overrightarrow{EB})$.
   (a) Uttryck vektorerna $\vec{e}_1$ och $\vec{e}_2$ i basen $(\vec{f}_1, \vec{f}_2)$. Om $\vec{v}$ är vektorn med koordinaterna $(2, -2)$ i basen $(\vec{e}_1, \vec{e}_2)$, bestäm koordinaterna för $\vec{v}$ i basen $(\vec{f}_1, \vec{f}_2)$. (4p)
   (b) Betrakta koordinatsystemet med origo i punkten E och basen $(\vec{f}_1, \vec{f}_2)$. Bestäm koordinaterna för punkten C i detta koordinatsystem. (1p)

Var god vänd!

4. (a) Bestäm alla nollställen i $\mathbb{C}$ till polynomet $p(z) = z^6 + 64$, och rita lösningarna i det komplexa talplanet. Nollställena skall anges på formen $z = a + bi$, med $a, b \in \mathbb{R}$. (4p)

   (b) Faktorisera $p(z)$ i irreducibla reella faktorer. (1p)

5. Låt a vara en reell konstant, och betrakta den räta linjen

$$(x, y, z) = (3, 5, -2) + t(a, 2, a^2 - 2), \qquad t \in \mathbb{R}.$$

Betrakta även planet $2x + y + z = 3$.

   (a) Bestäm skärningspunkten mellan planet och linjen i fallet $a = 1$, samt vinkeln mellan linjen och planet. (3p)

   (b) För vilket eller vilka värden på a gäller att linjen inte skär planet? (2p)

6. (a) Bestäm matrisen för den linjära avbildning F som fås om man först speglar i planet $z = y$, och sedan speglar i $yz-$planet (3p)

   (b) Det visar sig att F är spegling i en linje (behöver inte visas). Bestäm en riktningsvektor för den linjen. (2p)
   Tips: Bestäm en vektor $\vec{u} \neq \vec{0}$ som uppfyller $F(\vec{u}) = \vec{u}$.