

Tillåtna hjälpmedel är skrivdon. Fullständiga och väl motiverade lösningar krävs. Svaren ska framgå tydligt och vara rimligt slutförenklade. Betygsgränser:

Max	30 p		B	24 p		D	18 p	
	A	27 p		C	21 p		E	15 p

Koordinater förutsätts vara givna med avseende på en högerorienterad ON-bas.

1. Betrakta den diofantisk ekvation

$$15x + 13y = 11.$$

- (a) Bestäm alla lösningar till ekvationen. (3p)  
(b) Ange den eller de lösningar som minimerar  $|x - y|$ . (1p)  
(c) För vilka primtal  $p$  finns det lösningar till den diofantiska ekvationen  $15x + py = 11$ ? (1p)
2. (a) Bestäm den största gemensamma delaren till  $2^{122} + 6$  och 30. (3p)  
(b) Låt  $X$  och  $Y$  vara mängder som uppfyller (2p)

$$X \cup Y = \{1, 2, 3, 4, 5\}, \quad X \setminus Y = \{1, 3\}, \quad Y \setminus X \subseteq \{5\}.$$

Bestäm alla möjligheter för elementen i de två mängderna  $X$  och  $Y$ .

3. Ekvationen (5p)

$$z^5 + 4z^4 + 5z^3 + 8z^2 + 32z + 40 = 0$$

har en lösning  $z = -2 + i$ . Bestäm alla komplexa lösningar. Ange svaren på rektangulär (kartesisk) form.

4. Låt  $a$  vara en reell konstant, och betrakta de tre planen  $\Pi_1 : ax + y + z = 1$ ,  $\Pi_2 : x + ay + z = -1$  och  $\Pi_3 : x + y + az = 0$ . För vilka  $a$  saknar planen någon gemensam punkt, och för vilka  $a$  finns oändligt många gemensamma punkter? (5p)

5. (a) Bestäm ekvationen för det plan som innehåller punkterna  $(1, 0, -1)$  och  $(1, 2, -3)$ , och som är parallellt med linjen (3p)

$$(x, y, z) = (t, 1 - t, 3 - t), \quad t \in \mathbb{R}.$$

- (b) Bestäm den punkt i planet i (a) som är närmast punkten  $(7, 0, 5)$ . (2p)

6. Låt  $F : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$  vara den linjära avbildningen  $F(\vec{u}) = \vec{u} + (\vec{e}_1 \times \vec{u})$ .

- (a) Bestäm matrisen för  $F$  i standardbasen. (3p)  
(b) Visa att  $F$  är inverterbar, och bestäm den inversa avbildningens matris. (2p)