Lösningsförslag (obs: det kan finnas många andra sätt att resonera på!)

1. (a) Vi ser att $\{1,2,3,4\} \subseteq X$ för alla sådana mängder X, att 5 måste förekomma i precis en av X och Y, och detsamma för 6. Detta leder till följande fyra möjligheter:
Svar:

$$\begin{aligned}
X &= \{1,2,3,4\} & Y &= \{2,3,4,5,6\},\\
X &= \{1,2,3,4,5\} & Y &= \{2,3,4,6\},\\
X &= \{1,2,3,4,6\} & Y &= \{2,3,4,5\},\\
X &= \{1,2,3,4,5,6\} & Y &= \{2,3,4\}.
\end{aligned}$$

(b) Summan kan delas upp som en summa av två delar:

$$\sum_{k=1}^{100}\left(3^k + 2k - 1\right) = \sum_{k=1}^{100} 3^k + \sum_{k=1}^{100}(2k-1).$$

Enligt formeln för geometriska summor är

$$\sum_{k=1}^{100} 3^k = \frac{3^{101}-3}{2},$$

och enligt formeln för aritmetiska summor är

$$\sum_{k=1}^{100}(2k-1) = \frac{1+199}{2}\cdot 100 = 10\,000.$$

Svar: $\frac{3^{101}-3}{2} + 10\,000.$

2. (a) Vi har att

$$\begin{aligned}
\frac{2}{2x-1} < \frac{1}{x+3} &\iff \frac{2}{2x-1} - \frac{1}{x+3} < 0\\
&\iff \frac{2(x+3)-(2x-1)}{(2x-1)(x+3)} < 0\\
&\iff \frac{7}{(2x-1)(x+3)} < 0\\
&\iff (2x-1)(x+3) < 0.
\end{aligned}$$

Om $x \leq -3$ eller $x \geq 1/2$ så är produkten i VL ≥ 0, och om $-3 < x < 1/2$ är VL < 0.
Svar: $-3 < x < 1/2$ (eller $x \in (-3, \frac{1}{2})$).

(b) Enligt rationella rotsatsen så kan eventuella rationella nollställen a/b till $p(x)$, där $\text{sgd}(a,b)=1$, endast ha täljare a som delar 1, och nämnare b som delar 2. Detta ger möjligheterna $\pm 1, \pm 1/2$. Prövning visar att $x = 1/2$ är ett nollställe. Enligt faktorsatsen har vi därmed en faktor $(x-\frac{1}{2})$, eller $(2x-1)$, till $p(x)$, och polynomdivision ger

$$p(x) = (2x-1)(x^2-2x-1).$$

Enligt pq-formeln har den kvadratiska faktorn nollställena

$$x = 1 \pm \sqrt{2}.$$

Därmed har vi (enligt faktorsatsen igen):

Svar: $p(x) = (2x-1)\left(x-(1-\sqrt{2})\right)\left(x-(1+\sqrt{2})\right)$, nollställen: $\frac{1}{2}, 1\pm\sqrt{2}$.

3. (a) Vi skriver om med hjälp av potensregler och polärform:

$$z = 2^{1/30}\left(\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{1}{2}i\right) = 2^{1/30}e^{i\pi/6}.$$

Alltså är

$$z^{60} = 2^{60/30}e^{i10\pi} = 2^2e^{i0} = 4,$$

eftersom $e^{i\theta}$ är 2π-periodisk i θ.

Svar: 4.

(b) Enligt binomialsatsen gäller det att

$$(x+y)^{100} = \sum_{k=0}^{100}\binom{100}{k}x^ky^{100-k}.$$

Med $x=-1$ och $y=1$ ger detta

$$0 = \sum_{k=0}^{100}\binom{100}{k}(-1)^k1^{100-k},$$

och eftersom $1^{100-k}=1$ för alla k så har vi visat det som skulle visas.

4. Vi bildar systemets utökade koefficientmatris $(A \mid b)$ och använder en elementär radoperation för att förenkla det:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & a & 3 & 14 \\ 1 & 1 & 6 & 11 \\ 0 & -4 & a & -4 \end{array}\right) \begin{array}{c} \\ -R_1 \\ \\ \end{array} \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & a & 3 & 14 \\ 0 & 1-a & 3 & -3 \\ 0 & -4 & a & -4 \end{array}\right).$$

Via expansion i första kolonnen ser vi att koefficientmatrisens determinant är

$$\det(A) = 1 \cdot \begin{vmatrix} 1-a & 3 \\ -4 & a \end{vmatrix} = (1-a)a + 12 = -(a^2 - a - 12) = -(a-4)(a+3).$$

Detta är 0 om och endast om $a = 4$ eller $a = -3$. Enligt utlärd sats har systemet alltså en unik lösning om och endast om $a \notin \{-3, 4\}$.

Om $a = 4$ ser vi från ovan att systemet är ekvivalent med systemet som har utökad koefficientmatris

$$\left(\begin{array}{rrr|r} 1 & 4 & 3 & 14 \\ 0 & -3 & 3 & -3 \\ 0 & -4 & 4 & -4 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{rrr|r} 1 & 4 & 3 & 14 \\ 0 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right).$$

Detta är nu i trappstegsform och vi kan avläsa att det finns oändligt många lösningar, t.ex. med z som fri variabel.

Om $a = -3$ är systemet ekvivalent med systemet som har utökad koefficientmatris

$$\left(\begin{array}{rrr|r} 1 & -3 & 3 & 14 \\ 0 & 4 & 3 & -3 \\ 0 & -4 & -3 & -4 \end{array}\right) \begin{array}{l} \\ \\ +R_2 \end{array} \sim \left(\begin{array}{rrr|r} 1 & 4 & 3 & 14 \\ 0 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -7 \end{array}\right).$$

Den tredje raden här motsvarar ekvationen $0x + 0y + 0z = -7$, som inte har några lösningar. Därmed saknar systemet lösningar om $a = -3$.

Svar: Ingen lösning om $a = -3$, oändligt många lösningar om $a = 4$, entydig lösning annars.

5. (a) Linjerna skär varandra där de har samma koordinater (x, y, z). Om vi sätter

$$(1, 2, 3) + t(1, 1, 1) = (5, 8, 6) + s(1, -1, 2)$$

och förenklar så får vi systemet

$$\begin{aligned} t &= 4 + s \\ t &= 6 - s \\ t &= 3 - 2s. \end{aligned}$$

Genom att t.ex. addera de första två ekvationerna, och sedan substituera, ser vi att systemet har precis en lösning: $(s, t) = (1, 5)$. Detta ger att skärningspunkten är:

Svar: $(x, y, z) = (6, 7, 8)$.

(b) Planets normalvektorer är ortogonala mot både L_1:s och L_2:s riktningsvektorer. Vi kan hitta en sådan normalvektor t.ex. genom att ta kryssprodukten av dessa riktningsvektorer:

$$(1,1,1) \times (1,-1,2) = \ldots = (3,-1,-2).$$

Eftersom $(1,2,3)$ är en punkt på planet, så kan vi beskriva planet via ekvationen

Svar: $3(x-1)-(y-2)-2(z-3)=0$, eller $3x-y-2z=-5$.

(c) Låt $\Pi : 3x-y-2z=0$ vara det angivna planet. Båda de sökta planen har samma normalvektorer som Π. Eftersom vi kan läsa av dessa normalvektorer från ekvationen för Π, så behöver vi endast hitta koordinaterna för en enstaka punkt på ett av de sökta planen för att kunna skriva ned planets ekvation.

En punkt som ligger vinkelrätt avstånd 1 från planet Π kan fås genom att börja vid en punkt på Π, t.ex. $(0,0,0)$, och addera en normalvektor till Π av längd 1. Vi normerar normalvektorn $(3,-1,-2)$, och får:

$$\tfrac{1}{\sqrt{3^2+1^2+2^2}}(3,-1,-2) = \tfrac{1}{\sqrt{14}}(3,-1,-2).$$

Punkten med dessa koordinater har alltså vinkelrätt avstånd 1 till Π, så en ekvation för ett av de eftersökta planen är:

Svar: $3(x-\frac{3}{\sqrt{14}})-(y+\frac{1}{\sqrt{14}})-2(z+\frac{2}{\sqrt{14}})=0$.

6. Eftersom standardbasen är en ON-bas så ger direkt beräkning via koordinater att $\vec{f_1} \bullet \vec{f_1} = 1 = \vec{f_2} \bullet \vec{f_2}$ och att $\vec{f_1} \bullet \vec{f_2} = 0$. Därmed utgör $\mathcal{F}$ en ON-bas.

Matrisen för T relativt denna bas kan hittas på flera sätt, t.ex. via satsen om basbyte, eller via direkt beräkning. Vi använder direkt beräkning: vi behöver skriva vektorerna $T(\vec{f_1})$ och $T(\vec{f_2})$ i basen $\mathcal{F}$.

Vi har

$$T(\vec{f_1}) = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} \\ \frac{\sqrt{3}}{2} & -\frac{1}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{3}}{2} \\ \frac{1}{2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{3}}{2} \\ \frac{1}{2} \end{pmatrix} = \vec{f_1}.$$

I $\mathcal{F}$ är koordinaterna för $T(\vec{f_1})$ alltså $(1,0)$.

Vidare är

$$T(\vec{f_2}) = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} \\ \frac{\sqrt{3}}{2} & -\frac{1}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} \\ \frac{\sqrt{3}}{2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ -\frac{\sqrt{3}}{2} \end{pmatrix} = -\vec{f_2}.$$

I $\mathcal{F}$ är koordinaterna för $T(\vec{f_2})$ alltså $(0,-1)$.

Alltså är matrisen för T relativt basen $\mathcal{F}$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

Vi kan känna igen detta som en matris för en spegling i axeln motsvarande den första basvektorn. Alltså motsvarar T en spegling i linjen genom origo med riktningsvektor $\vec{f}_1$.