MATEMATISKA INSTITUTIONEN
STOCKHOLMS UNIVERSITET
Avd. Matematik
Examinator: Olof Sisask
Föreläsare: Per Alexandersson

Tentamensskrivning i
Algebra, Matematik I, 7.5 hp
den 10 augusti 2023

Tillåtna hjälpmedel är skrivdon. Fullständiga och väl motiverade lösningar krävs. Svaren ska framgå tydligt och vara rimligt slutförenklade. Betygsgränser:

Max	30 p	B	24 p	D	18 p
A	27 p	C	21 p	E	15 p

Koordinater förutsätts vara givna med avseende på en högerorienterad ON-bas.

1. (a) Beräkna koefficienten framför x^8 i $(2x^4 + x^{-1})^7$. (2p)

   (b) Bestäm resten då 3^{100} delas med 5. (1p)

   (c) Bestäm resten då $1 + 2 + 3 + 4 + \cdots + 3^{100}$ delas med 5. (2p)

   Lösning. (a) Binomialsatsen ger

$$(2x^4+x^{-1})^7 = \sum_{k=0}^{7} \binom{7}{k} (2x^4)^k (x^{-1})^{7-k} = \sum_{k=0}^{7} \binom{7}{k} 2^k x^{4k} x^{k-7} = \sum_{k=0}^{7} \binom{7}{k} 2^k x^{5k-7}.$$

   Vi måste välja $5k - 7 = 8$, så $5k = 15$ och $k = 3$. Motsvarande term är

$$\binom{7}{3} 2^3 = 8 \cdot \frac{7 \cdot 6 \cdot 5}{3!} = 8 \cdot 35 = 240 + 40 = 280.$$

   (b) Vi har att $3^{100} \equiv_5 9^{50} \equiv_5 (-1)^{50} \equiv_5 1$.

   (c) Termerna i summan (mod 5) är då

$$1, 2, 3, 4, 0,\ 1, 2, 3, 4, 0,\ \ldots, 1, 2, 3, 4, 0,\ 1$$

   där sista ettan motsvarar 3^{100} enl. (b). Nu, $1 + 2 + 3 + 4 + 0 \equiv_5 0$, så hela summan ger rest 1.

2. Ekvationen $z^4 - 8z^3 + 27z^2 - 50z + 50 = 0$ har $z_1 = 3 + i$ som en rot. Finn övriga rötter $z \in \mathbb{C}$. (5p)

   Lösning. Eftersom vi har reella koefficienter är $z_2 = 3 - i$ också en rot, så $(z - 3 - i)(z - 3 + i) = z^2 - 6z + 10$ är en faktor. Polynomdivision ger sedan att

$$z^4 - 8z^3 + 27z^2 - 50z + 50 = (z^2 - 6z + 10)(z^2 - 2z + 5)$$

   Ekvationen $z^2 - 2z + 5 = 0$ har nu (via PQ-formeln) lösningarna $z_3 = 1 + 2i$, $z_4 = 1 - 2i$.

3. Svara på följande frågor.

(a) Hur många 6-siffriga tal kan bildas av $1, 2, 3, 4, 5, 6$, så att varje siffra förekommer exakt en gång. (1p)

(b) Hur många 6-siffriga tal kan bildas av $1, 1, 2, 2, 2, 5$, där 1 förekommer två gånger, 2 förekommer tre gånger och 5 förekommer en gång? (2p)

(c) Bland 1260 ord, så finns det 120 ord där `aa` förekommer, 120 ord där `bb` förekommer och 24 ord där både `aa` och `bb` förekommer. Hur många av orden uppyller att varken `aa` eller `bb` förekommer? (2p)

(Notera att bland de 120 ord som innehåller `aa`, så får `bb` också förekomma, och vice versa för de ord som innehåller `bb`.)

Lösning. (a) Eftersom alla siffror är olika finns det 6! 6-siffriga tal.

(b) Om alla siffror vore olika så finns det 6! olika tal. Det finns 2! sätt att permutera de två ettorna som är lika, och 3! sätt att permutera de tre tvåorna, så bland de 6! talen så förekommer varje permutation $2! \cdot 3!$ gånger. Delar vi med denna faktor får vi svaret $\frac{6!}{2! \cdot 3!} = 60$.

(c) Vi använder inklusion-exklusion: Låt U vara alla ord, låt A vara orden med `aa` och B orden med `bb`. Vi söker $(A \cup B)^c = |U| - |A| - |B| + |A \cap B|$ (rita Venn-diagram) som för oss blir

$$1260 - 120 - 120 + 24 = 1044.$$

4. Beräkna inversen till matrisen A nedan och lös ekvationssystemet: (5p)

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 3 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \qquad \text{respektive} \qquad \begin{cases} 2x + y + z & = 3 \\ 3x + 2y + z & = 4 \\ x + y + z & = -2. \end{cases}$$

Lösning. Vi ställer upp matrisen brevid identitetsmatrisen, som vi sedan Gauss-eliminerar:

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 2 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 3 & 2 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 3 & 2 & 1 & 0 & 1 & 0 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & -1 & 1 & 0 & -2 \\ 0 & -1 & -2 & 0 & 1 & -3 \end{array}\right)$$

Vi byter tecken i rad 2, och eliminerar i rad 1 och 3:

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 1 & -1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & -1 & -1 & 1 & -1 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & -2 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & -1 & 1 \end{array}\right).$$

Inversen blir alltså

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ -2 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Notera att A är koefficientmatrisen för ekvationssystemet och att A är inverterbar. Detta innebär att systemet har en unik lösning som ges av

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ -2 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \\ -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ -4 \\ -3 \end{pmatrix}.$$

Systemet har alltså lösningen $x = 5$, $y = -4$, $z = -3$.

5. (a) Låt $\mathbf{u} = (1, 2, 1)$ och $\mathbf{v} = (3, 1, 2)$. Finn en nollskild vektor som är ortogonal mot både $\mathbf{u}$ och $\mathbf{v}$. (1p)

   (b) Om $\mathbf{f}_1, \mathbf{f}_2, \mathbf{f}_3$ utgör en ON-bas, vad går det att säga om $|\mathbf{f}_1|$, $\mathbf{f}_1 \cdot \mathbf{f}_2$ samt $\mathbf{f}_3 \cdot \mathbf{f}_3$? (1p)

   (c) Bestäm talen a, b och c i matrisen nedan så att matrisen blir ortogonal. (3p)

$$\frac{1}{11} \begin{pmatrix} a & 6 & 9 \\ 9 & -6 & 2 \\ 6 & b & c \end{pmatrix}.$$

Lösning. (a) Vi tar kryssprodukten av vektorerna. Enligt determinanttricket ges denna av

$$\begin{vmatrix} \mathbf{e}_1 & \mathbf{e}_2 & \mathbf{e}_3 \\ 1 & 2 & 1 \\ 3 & 1 & 2 \end{vmatrix} = \mathbf{e}_1(2\cdot 2 - 1\cdot 1) - \mathbf{e}_2(1\cdot 2 - 3\cdot 1) + \mathbf{e}_3(1\cdot 1 - 3\cdot 2) = (3, 1, -5).$$

Denna är ortogonal mot både $\mathbf{u}$ och $\mathbf{v}$.

(b) Vi har att $|\mathbf{f}_1| = 1$ då N:et i ON står för *normerad*, dvs. längd 1. Vidare, $\mathbf{f}_1 \cdot \mathbf{f}_2 = 0$ då vektorer är parvis ortogonala. Slutligen, $\mathbf{f}_3 \cdot \mathbf{f}_3 = |\mathbf{f}_3|^2 = 1^2 = 1$.

(c) För att de två första raderna ska vara ortogonala, har vi att

$$(a, 6, 9) \cdot (9, -6, 2) = 0 \implies 9a - 36 + 18 = 0 \implies a = 2.$$

De två första kolonnerna ska också vara ortogonala, så

$$(2, 9, 6) \cdot (6, -6, b) = 0 \implies 12 - 54 + 6b = 0 \implies b = 7.$$

Slutligen, första och sista kolonnen ska också vara ortogonala, så

$$(2, 9, 6) \cdot (9, 2, c) = 0 \implies 18 + 18 + 6c = 0 \implies c = -6.$$

Matrisen blir då

$$\frac{1}{11}\begin{pmatrix} 2 & 6 & 9 \\ 9 & -6 & 2 \\ 6 & 7 & -6 \end{pmatrix}.$$

6. Låt $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ vara den linjära avbildning som speglar en vektor i $\mathbb{R}^3$ vinkelrätt i planet $x + z = 0$.

   (a) Låt $\mathbf{u} = (1, 1, 1)$. Bestäm $T(\mathbf{u})$. (1p)

   (b) Bestäm avbildningsmatrisen för T i standardbasen. (2p)

   (c) Vektorerna $\mathbf{f}_1 = \frac{1}{\sqrt{2}}(1, 0, 1)$, $\mathbf{f}_2 = \frac{1}{\sqrt{2}}(1, 0, -1)$, $\mathbf{f}_3 = (0, 1, 0)$ utgör en bas för $\mathbb{R}^3$. Bestäm avbildningsmatrisen A för T i basen $(\mathbf{f}_1, \mathbf{f}_2, \mathbf{f}_3)$. (2p)

Lösning. (a) $\mathbf{u} = (1, 0, 1) + (0, 1, 0)$ så $T(\mathbf{u}) = T(1, 0, 1) + T(0, 1, 0)$. Eftersom $(0, 1, 0)$ är vinkelrät mot $(1, 0, 1)$ så avbildas denna på sig själv, och $T(1, 0, 1) = (-1, 0, -1)$ då detta är normalvektorn till planet. Alltså gäller

$$T(\mathbf{u}) = (-1, 0, -1) + (0, 1, 0) = (-1, 1, -1).$$

Alternativt kan man använda avbildningsmatrisen i (b), för att bestämma $T(1, 1, 1)$.

(b) Formeln för spegling av $\mathbf{v}$ i ett plan med normalvektor $\mathbf{n}$ ges av

$$\mathbf{v}_{\text{spegling}} = \mathbf{v} - 2\frac{\mathbf{v} \cdot \mathbf{n}}{|\mathbf{n}|^2}\mathbf{n}.$$

Vi sätter in $\mathbf{n} = (1, 0, 1)$ och $\mathbf{v}$ some de tre vektorerna som utgör standardbasen. Detta ger att

$$\begin{aligned} T(\mathbf{e}_1) &= (1, 0, 0) - 2\tfrac{1}{2}(1, 0, 1) = (0, 0, -1), \\ T(\mathbf{e}_2) &= (0, 1, 0) - 2\tfrac{0}{2}(1, 0, 1) = (0, 1, 0), \\ T(\mathbf{e}_3) &= (0, 0, 1) - 2\tfrac{1}{2}(1, 0, 1) = (-1, 0, 0), \end{aligned}$$

och avbildningsmatrisen blir

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

(c) Vektorn $\mathbf{f}_1$ är parallell med $(1,0,1)$ och avbildas på $-\mathbf{f}_1$. De två andra vektorerna är vinkelräta med $(1,0,1)$ och avbildas på sig själva. Avbildningsmatrisen blir då

$$\begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$