MATEMATISKA INSTITUTIONEN	Tentamensskrivning i
STOCKHOLMS UNIVERSITET	Matematik I Analys
Avd. Matematik	Problemlösning, 7.5 hp
Examinator: A. Sola	20 februari 2019

Inga hjälpmedel tillåtna. Varje uppgift är värd 5 poäng och 15 poäng ger garanterat betyg E. Motivera alla lösningar noggrant.

1. Beräkna gränsvärdena

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\sin(n^2)}{n^4}$$

och

$$\lim_{x\to 0}\frac{xe^{2x}+\sin x-2x-2x^2}{x^3}.$$

Lösningsförslag: *För att beräkna det första gränsvärdet utnyttjar vi att standardgränsvärdet* $\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}=1$ *medför att uttrycket* $\sin(n^2)/n^2$ *är begränsat för alla* n. *Eftersom* $\lim_{n\to\infty} n^{-2}=0$ *får vi nu*

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\sin(n^2)}{n^4}=0.$$

Vi behandlar sedan det andra gränsvädet. Notera att

$$xe^{2x}=x(1+2x+2x^2+\mathcal{O}(x^3))=x+2x^2+2x^3+\mathcal{O}(x^4)$$

och

$$\sin x = x-\frac{1}{6}x+\mathcal{O}(x^3).$$

Vi sätter in detta i gränsvärdesberäkningen och erhåller

$$\lim_{x\to 0}\frac{xe^{2x}+\sin x-2x-2x^2}{x^3}=\lim_{x\to\infty}\frac{2x+2x^2+\frac{11}{6}x^3+\mathcal{O}(x^4)-2x-2x^2}{x^3}=\lim_{x\to\infty}\frac{\frac{11}{6}x^3+\mathcal{O}(x^4)}{x^3}=\frac{11}{6}.$$

2. Undersök extremvärden, konvexitetsegenskaper och asymptoter till funktionen

$$f(x)=\frac{x^3+6x}{1+x^2}.$$

Skissera även grafen till f.

Lösningsförslag: *Vi noterar att nämnaren i* f *är positiv för alla* x, *vilket innebär att* f *är överallt deriverbar och att lodräta asymptoter saknas. Vidare är* f *en udda funktion, varför det räcker att undersöka funktionens förlopp för positiva* x *och sedan utnyttja denna symmetri.*

För att finna eventuella punkter där $f'(x)=0$ *deriverar vi först,*

$$f'(x)=\frac{(3x^2+6)(1+x^2)-(x^3+6x)}{(1+x^2)^2}=\frac{x^4-3x^2+6}{(1+x^2)^2},$$

och observerar därefter, exempelvis genom kvadratkomplettering, att polynomet x^4-3x^2+6 *saknar reella nollställen. Då* $f'(0)>0$ *är derivatan till* f *överallt positiv. Vi drar slutsatsen att lokala extremvärden saknas och att* f *är växande.*

För att undersöka konvexitet hos f beräknar vi funktionens andraderivat. Vi har

$$f''(x) = 10\frac{x(x^2-3)}{(1+x^2)^3}.$$

Vi ser nu att $f''(0) = f''(\pm\sqrt{3}) = 0$ och att $f''(x) < 0$ för $0 < x < \sqrt{3}$ medan $f''(x) > 0$ för $x > \sqrt{3}$. Således är f konkav på $0 < x < \sqrt{3}$ och konvex för $x > \sqrt{3}$ och på grund av symmetri, konvex på $-\sqrt{3} < x < 0$ och konkav för $x < -\sqrt{3}$.

Slutligen bildar vi differensen

$$\frac{x^3+6x}{1+x^2} - x = \frac{x^3+6x-x-x^3}{1+x^2} = \frac{5x}{1+x^2}$$

och drar från detta slutsatsen att

$$\lim_{x\to\pm\infty}(f(x)-x) = 0$$

vilket betyder att $y = x$ är en sned asymptot.

3. Bestäm volymen av den rotationskropp som erhålles då kurvan

$$y = x + x^2, \quad 0 \le x \le 4,$$

får rotera runt x-axeln.

Lösningsförslag: *Vi använder skivformeln för rotationsvolymer och erhåller integralen*

$$V = \pi\int_0^4 f(x)^2dx = \pi\int_0^4 (x+x^2)^2dx = \pi\int_0^4 x^2(1+x)^2dx.$$

Vi har nu

$$\int_0^4 x^2(1+x)^2dx = \int_0^4 (x^2+2x^3+x^4)dx = \left[\frac{1}{3}x^3 + \frac{1}{2}x^4 + \frac{1}{5}x^5\right]_0^4$$

vilket är lika med $\frac{320+1920+3072}{15} = \frac{5312}{15}$. Den sökta volymen är alltså lika med $5312/15\pi$.

4. Bestäm största och minsta värdet till funktionen

$$f(x,y) = |xy| - 1$$

på cirkelskivan

$$\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \colon x^2 + y^2 \le 4\}$$

och ange samtliga punkter där dessa värden antas.

Lösningsförslag:

Vi noterar att grafen till f är symmetrisk med avseende på spegling i både x-axeln och y-axeln, vilket betyder att det räcker att undersöka första kvadranten. Största och minsta värden antas i stationära punkter, punkter där f ej är deriverbar eller i randpunkter.

För $x > 0$ och $y > 0$ har vi

$$\frac{\partial f}{\partial x} = y \quad och \quad \frac{\partial f}{\partial y} = x$$

vilka båda är nollskilda för positiva värden på x och y.

Däremot är f ej deriverbar när $x = 0$ eller $y = 0$. Vi har här $f(0,y) = f(x,0) = -1$, vilket uppenbarligen är minsta värde för f.

Vi undersöker nu randen till cirkelskivan i första kvadranten. Här kan vi parametrisera med hjälp av $x(t) = 2\cos t$ och $y(t) = 2\sin t$, $0 \le t \le \pi/2$. Vi ser att

$$f(x(t),y(t)) = 4\cos t\sin t - 1 = 2\cdot 2\sin t\cos t - 1 = 2\sin(2t) - 1.$$

Vi ser genast att $f(x(t),y(t))$ maximeras för $0 \le t \le \pi/2$ av $f(\pi/4,\pi/4) = 2 - 1 = 1$.

Således är 1 största värde till f medan -1 är funktionens minsta värde.

5. Beräkna dubbelintegralen

$$\iint_D xe^{x^2}e^{-\frac{y}{2}}dxdy$$

där

$$D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \colon 0 \leq x \leq 4, -x^2 \leq y \leq x^2\}.$$

Lösningsförslag:

Vi beräknar dubbelintegralen medelst upprepad integration,

$$\iint_D xe^{x^2}e^{-\frac{y}{2}}dxdy = \int_0^4 \left(\int_{-x^2}^{x^2} e^{-\frac{y}{2}}dy\right) e^{x^2}xdx.$$

Vi har

$$\int_{-x^2}^{x^2} e^{-\frac{y}{2}}dy = \left[-2e^{-\frac{y}{2}}\right]_{-x^2}^{x^2} = -2e^{-\frac{x^2}{2}} + 2e^{\frac{x^2}{2}}.$$

Insättning ger vidare att

$$\int_0^4 \left(\int_{-x^2}^{x^2} e^{-\frac{y}{2}}dy\right) xe^{x^2}dx = \int_0^4 2xe^{\frac{3x^2}{2}}dx - \int_0^4 2xe^{\frac{x^2}{2}}dx.$$

Vidare gäller enligt kedjeregeln att $(e^{\frac{3x^2}{2}})' = 3xe^{\frac{x^2}{2}}$ *och* $(e^{\frac{x^2}{2}})' = 3e^{\frac{x^2}{2}}$, *vilket ger*

$$\int_0^4 2xe^{\frac{3x^2}{2}}dx - \int_0^4 2xe^{\frac{x^2}{2}}dx = \left[\frac{2}{3}e^{\frac{3x^2}{2}}\right]_0^4 - \left[2e^{\frac{x^2}{2}}\right]_0^4 = \frac{2}{3}e^{24} - 2e^8 + \frac{4}{3}.$$

6. Bestäm den lösning till differentialekvationen

$$y'' + y' - 2y = 1$$

som uppfyller $y(0) = -1$ och $y'(0) = 0$.

Lösningsförslag: *Betrakta först den homogena differentialekvationen*

$$y'' + y' - 2y = 0.$$

Vi ansätter $y(x) = e^{rx}$ *och erhåller efter insättning i differentialekvationen den karaktäristiska ekvationen*

$$r^2 + r - 2 = 0$$

vilken har rötterna $r_1 = -2$ *och* $r_2 = 1$. *Därmed ges lösningen till den homogena ekvationen av*

$$y_h(x) = C_1e^{-2x} + C_2e^x.$$

Nu söker vi en partikulärlösning. Genom att sätta in ansatsen $y_p = A$ *i ekvationen får vi att* $y_p = -1/2$. *Vi har således den allmänna lösningen*

$$y(x) = y_h(x) + y_p(x) = C_1e^{-2x} + C_2e^x - \frac{1}{2}.$$

Villkoret $y(0) = -1$ *ger att* $C_1 + C_2 = 1/2$ *medan* $y'(0) = 0$ *ger att* $-2C_1 + C_2 = 0$. *Vi löser detta ekvationssystem och får till slut*

$$y(x) = -\frac{1}{6}e^{-2x} - \frac{1}{3}e^x - \frac{1}{2}.$$

Skrivningsåterlämning äger rum torsdag 28 februari klockan 10:00 utanför sal 15 i hus 5.
Därefter kan skrivningen hämtas på studentexpeditionen i rum 204.