MATEMATISKA INSTITUTIONEN
STOCKHOLMS UNIVERSITET
Avd. Matematik
Examinator: Alan Sola

Tentamensskrivning i
Matematik I, Analys,
Problemlösning, 7.5 hp,
23 maj 2019.

Tillåtna hjälpmedel: inga. Samtliga svar måste motiveras noggrant. 15 poäng ger säkert minst betyget E.

1. a) Beräkna följande gränsvärde:

$$\lim_{x\to 1} \frac{x^2+3x-4}{x^2-1}.$$

2 p

Lösning: Faktorisera:

$$\frac{(x-1)(x+4)}{(x-1)(x+1)} = \frac{x+4}{x+1} \to \frac{5}{2}.$$

Alternativt byt koordinat till $t = x-1$ och få ett gränsvärde där $t \to 0$, som löses med att identifiera dominerande faktor.

b) Beräkna följande gränsvärde:

$$\lim_{x\to 0} \frac{\ln(x+1)}{\sin x}.$$

2 p

Lösning: Med standardgränsvärden:

$$\frac{\ln(x+1)}{\sin x} = \frac{\ln(x+1)}{x}\frac{x}{\sin x} \to 1 \cdot 1 = 1.$$

Med Maclaurin: $(x+O(x^2))/(x+O(x^3)) = (1+O(x))/(1+O(x^2)) \to 1$. L'Hôpital kan också användas.

2. a) När man byter från rektangulära koordinater (x, y) i planet till polära koordinater (r, θ) så skall $dx\,dy$ i en dubbelintegral ersättas med vad då? 1 p

Lösning: $r\,dr\,d\theta$. Ingen motivering krävs.

b) Låt $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid y \geq 0,\ 1 \leq x^2+y^2 \leq 4\}$. Beräkna

$$\iint_D \ln(x^2+y^2)\,dx\,dy.$$

4 p

Lösning: Byt till polära koordinater. Nytt område $\tilde{D} = \{(r, \theta) \mid 1 \leq r \leq 2,\ 0 \leq \theta \leq \pi\}$. Vi får

$$\iint_{\tilde{D}} \ln(r^2) r\,dr\,d\theta = \pi \int_1^2 2r \ln r\,dr.$$

Primitiv hittas lättast med partiell integration. Vi får

$$\pi\Big[r^2\big(\ln r - \frac{1}{2}\big)\Big]_1^2 = \pi\big(4\ln 2 - \frac{3}{2}\big).$$

3. Rita grafen till funktionen

$$f(x) = x + \frac{3}{x} + 4 \arctan x.$$

Undersök speciellt stationära punkter, extremvärden, och asymptoter. Ange även funktionens värdemängd. (*Försäkra dig om att du utreder allt som problemformuleringen efterfrågar!*) 6 p

Lösning: Funktionen är definierad i $x = 0$, där den har en lodrät asymptot; $\lim_{x \to O^\pm} f(x) = \pm\infty$. De sneda asymptoterna $y = x \pm 2\pi$ då $x \to \pm\infty$ följer av $\lim_{x \to \pm\infty} \arctan x = \pm\pi/2$.
Derivatan är

$$f'(x) = 1 - \frac{3}{x^2} + \frac{4}{x^2+1} = \frac{x^4 + 2x^2 - 3}{x^2(x^2+1)}.$$

Täljaren kan faktoriseras till $x^2 - 1)(x^2 + 3) = (x+1)(x-1)(x^2+3)$ så enda stationära punkterna är $x = \pm 1$. Den faktoriserade presentationen av $f'(x)$ gör det enkelt att göra en teckentabell, och dra slutsatsen att $f(-1) = -4 - \pi$ är ett lokalt max, samt att $f(1) = 4 + \pi$ är ett lokalt min.
Värdemängden är $\{y \in \mathbf{R} \mid |y| \geq 4 + \pi\}$.
[Bifoga grafskiss här.]

4. Bestäm största och minsta värde till funktionen $f(x,y) = x^2 - y^2$ i området $D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid 0 \leq x \leq 3, -x \leq y \leq x\}$. Ange i vilka punkter dessa värden antas. 5 p

Lösning: Området är en triangel. Randen har tre komponenter, med respektive randrestriktion av $f(x,y)$:

$$\begin{aligned} &L_1 : \ x \in [0,3],\ y = -x, && g_1(x) = 0; \\ &L_2 : \ x = 3,\ y \in [-3,3], && g_2(y) = 9 - y^2; \\ &L_3 : \ x \in [0,3],\ y = x, && g_3(x) = 0. \end{aligned}$$

Vi ser att $f(x,y)$ är 0 på L_1 och L_3 (särskilt i de tre hörnen av D) och att vi har ett lokalt maxvärde $f(3,0) = 9$ $(= g_2(0))$ på L_2.
De partiella derivatorna $\partial f/\partial x = 2x$ och $\partial f/\partial y = -2y$ är båda definierade överallt, så singulära punkter saknas.
Den enda stationära punkten är origo, men den ligger ej i *det inre* av området.
Maxvärde är $9 = f(3,0)$. Minsta värde är 0 och det antas konstant på randkomponenterna L_1 och L_3.

5. Beräkna den rotationsvolym som uppstår då funktionsgrafen

$$y = \frac{1}{\sqrt{x \ln x}}, \qquad e^2 \leq x \leq e^4,$$

får rotera runt x-axeln. Svaret skall förenklas så långt som möjligt. 4 p

Lösning: Enligt formel skall vi beräkna

$$V = \pi \int_{e^2}^{e^4} \frac{1}{x \ln x}\, dx.$$

Sätt $u = \ln x$. Variabelbytet är inverterbart med invers $x = e^u$ på hela integrationsintervallet. Vi får

$$V = \pi \int_2^4 \frac{du}{u} = \pi \big[\ln u\big]_2^4 = \pi \ln \frac{4}{2} = \pi \ln 2.$$

6. a) Bestäm en lösning $x(t)$ till

$$x'' - 2x' + 5x = -t$$

som uppfyller villkoren $x(0) = 0$ och $x'(0) = 0$. 3 p

Lösning: Karaktäristiska polynomet $r^2 - 2r + 5 = (r-1)^2 + 4$ har komplexkonjugerade rötter $r = 1 \pm 2i$. Allmän homogen lösning är därför

$$x_h(t) = e^t\big(A\cos(2t) + B\sin(2t)\big), \quad A, B \in \mathbf{R}.$$

Ansätt som partikulärlösning $x_p(t) = a + bt$, med konstanter a och b. Insättning i diffekvationen ger $-2b + 5(a + bt) = -t$, vilket fordrar $b = -1/5$ och $a = -2/25$. Vi har nu en allmän lösning

$$x(t) = -\frac{2}{25} - \frac{1}{5}t + e^t\big(A\cos 2t + B\sin 2t\big).$$

Villkoret $x(0) = 0$ säger $-2/25 + A = 0$, så $A = 2/25$. Derivatan är

$$x'(t) = -\frac{1}{5} + e^t\big(A\cos 2t + B\sin 2t\big) + e^t\big(-2A\sin 2t + 2B\cos 2t\big).$$

Insättning $t = 0$ ger

$$x'(0) = -\frac{1}{5} + A + 2B.$$

Villkoret $x'(0) = 0$ säger alltså $B = -3/50$. Slutlig lösning är

$$x(t) = -\frac{2}{25} - \frac{1}{5}t + e^t\left(\frac{2}{25}\cos 2t + \frac{3}{50}\sin 2t\right).$$

b) En kula med massan 50 kg skjuts rakt upp med en initial hastighet på 98 m/s. Antag att luftmotståndet vid tiden t på kulan är $5v(t)$, där $v(t)$ betecknar kulans hastighet. Antag vidare att gravitationskonstanten $g = 9.8\ m/s^2$. Efter hur många sekunder når kulan sin högsta punkt? Komplettera ditt exakta svar med ett närmevärde. (*Newton tipsar:* Kulans rörelse uppfyller lagen $mv'(t) = F(t)$, där $F(t)$ är den totala kraften på kulan.) 3 p

Lösning: Newtons tips låter oss ställa upp differentialekvationen $mv' = -5v - 9.8m$, eller $v' + \frac{5}{m}v = 9.8$. I givna siffror:

$$v' + \frac{1}{10}v = -9.8.$$

Till denna ekvation har vi initialvillkoret $v(0) = 98$. Ekvationen löses med integrerande faktor:

$$v(t) = e^{-t/10}\int e^{t/10}(-9.8)\,dt = e^{-t/10}\big(-98e^{t/10} + C\big) = Ce^{-t/10} - 98.$$

Villkoret $v(0) = 98$ ger oss $C = 196$. Kulan når som högst i ögonblicket just då den vänder, dvs då hastigheten är noll: $v(t) = 0$ är ekvationen $196e^{-t/10} - 98 = 0$, eller $e^{-t/10} = 1/2$, vilket är ekvivalent med $e^{t/10} = 2$, dvs $t = 10\ln 2$. Närmevärdet $\ln 2 \simeq 7/10$ ger $t \simeq 7$, dvs att kulan når sin högsta punkt efter ungefär sju sekunder.