Matematiska institutionen
STOCKHOLMS UNIVERSITET

Lösningsskisser till tentamen i Analys, Matematik I, den 17 december 2020

1. (a) Förlänger vi med konjugatet får vi

$$\lim_{x\to\infty}\left(x-\sqrt{x^2+x}\right)=\lim_{x\to\infty}\frac{-x}{x+\sqrt{x^2+x}}=\lim_{x\to\infty}\frac{-1}{1+\sqrt{1+1/x}}=\frac{-1}{1+1}=-\frac{1}{2}.$$

(b) Med standardutvecklingarna $e^t=1+t+t^2/2!+O(t^3)$ och $\arctan(t)=t-t^3/3+O(t^5)$ då $t\to 0$ får vi

$$\begin{aligned}&\frac{e^{x^2}-(\arctan(x))^2-1}{x^4}\\&=\frac{(1+x^2+x^4/2+O(x^6))-(x-x^3/3+O(x^5))^2-1}{x^4}\\&=\frac{1+x^2+x^4/2-x^2+2x^4/3-1+O(x^5)}{x^4}\\&=\frac{7x^4/6+O(x^5)}{x^4}=7/6+O(x)\to\frac{7}{6}\end{aligned}$$

då $x\to 0$.

2. (a) Eftersom $\frac{\ln x}{\sqrt{x}}\geq 0\Leftrightarrow x\geq 1$ får vi att området ges av

$$0\leq y\leq\frac{\ln x}{\sqrt{x}},\qquad 1\leq x\leq\sqrt{e},$$

så med formeln för rotationsvolym får vi att volymen V ges av

$$V=\pi\int_1^{\sqrt{e}}\left(\frac{\ln x}{\sqrt{x}}\right)^2dx=\pi\int_1^{\sqrt{e}}\frac{(\ln x)^2}{x}\,dx$$
$$=\left[t=\ln x,\quad dt=\frac{1}{x}dx\right]=\pi\int_0^{1/2}t^2\,dt=\pi\left[\frac{t^3}{3}\right]_{t=0}^{t=1/2}=\frac{\pi}{24}.$$

(b) Vi börjar med att bestämma den primitiva funktionen

$$\begin{aligned}\int\frac{dx}{x(\ln(3x))^2}&=\left[t=\ln(3x),\quad dt=\frac{1}{x}dx\right]\\&=\int\frac{dt}{t^2}=-\frac{1}{t}+C=-\frac{1}{\ln(3x)}+C,\end{aligned}$$

så vi får

$$\int_2^N\frac{dx}{x(\ln(3x))^2}=\left[-\frac{1}{\ln(3x)}\right]_2^N=\frac{1}{\ln 6}-\frac{1}{\ln(3N)}\to\frac{1}{\ln 6}$$

då $N\to\infty$. Alltså är den generaliserade integralen $\displaystyle\int_2^\infty\frac{dx}{x(\ln(3x))^2}$ konvergent med värde $\displaystyle\frac{1}{\ln 6}$.

3. Om vi skriver funktionsuttrycket utan absolutbelopp får vi efter förenkling att

$$f(x) = \begin{cases} \frac{2}{x+1} - 1 & \text{om } x \geq \frac{1}{2}, \\ -1 - \frac{2x}{x^2-1} & \text{om } x < \frac{1}{2}. \end{cases}$$

Vi noterar att funktionen kan utvidgas till en kontinuerlig funktion vid $x = 1$ (vilket vi för enkelhets skull kommer att göra tills det är dags att rita grafen), så enda möjliga vertikala asymptoten är vid $x = -1$. Eftersom $\lim_{z \to -1-} f(x) = \infty$ och $\lim_{z \to -1+} f(x) = -\infty$ så är $x = -1$ en asymptot. Vidare ser vi att $\lim_{x \to \pm\infty} f(x) = -1$, så $y = -1$ är en horisontell asymptot.

Punkten $x = 1/2$ är en singulär punkt, och derivering ger

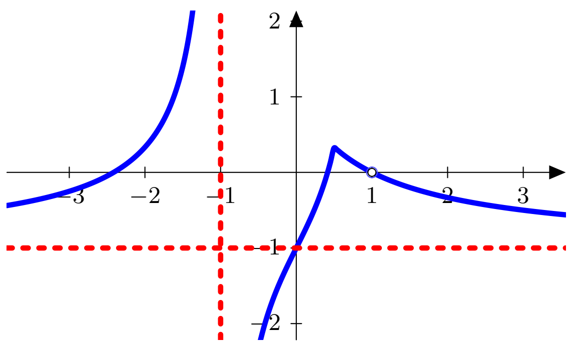
$$f'(x) = \begin{cases} \frac{-2}{(x+1)^2} & \text{om } x > \frac{1}{2} \\ \frac{2(x^2+1)}{(x^2-1)^2} & \text{om } x < \frac{1}{2} \end{cases}, \qquad f''(x) = \begin{cases} \frac{4}{(x+1)^3} & \text{om } x > \frac{1}{2} \\ \frac{-4x(x^2+3)}{(x^2-1)^3} & \text{om } x < \frac{1}{2}. \end{cases}$$

Vi ser att $f'(x)$ saknar nollställen, och vidare att $f''(x) = 0$ bara för $x = 0$. Vi gör en teckentabell

x		-1		0		1/2	
$f'(x)$	+	≀	+	+	+	≀	-
$f(x)$	↗	≀	↗	↗	↗	1/3	↘
$f''(x)$	+	≀	-	0	+	≀	+
$f(x)$	⌣	≀	⌢	infl.	⌣	≀	⌣

Från teckentabellen ser vi att funktionen har precis ett lokalt extremvärde, ett lokalt maximum vid $x = 1/2$. Vidare har vi en inflektionspunkt vid $x = 0$, och (den utvidgade) funktionen är konvex på intervallen $]-\infty, -1[$, $[0, 1/2]$ och $[1/2, \infty[$, samt konkav på $]-1, 0]$.

Vi har nu tillräcklig information för att kunna rita en skiss av grafen:



4. Området är den halva av cirkeln med radie 2 med centrum i origo som ligger över linjen $y = x$, så i polära koordinater $\begin{cases} x = r\cos(\theta) \\ y = r\sin(\theta) \end{cases}$ motsvaras det av området $E = \{(r, \theta) \in \mathbb{R}^2 \mid 0 \leq r \leq 2,\ \pi/4 \leq \theta \leq 5\pi/4\}$ i $r\theta$-planet. Vi får

$$\iint_D y e^{\sqrt{x^2+y^2}}\, dx dy = \iint_E r\sin(\theta) e^r r\, dr d\theta = \int_{\pi/4}^{5\pi/4} \sin(\theta)\, d\theta \int_0^2 r^2 e^r\, dr$$

$$= [-\cos(\theta)]_{\theta=\pi/4}^{\theta=5\pi/4} \int_0^2 r^2 e^r\, dr = \sqrt{2} \int_0^2 r^2 e^r\, dr$$

Vi beräknar den återstående integralen med upprepad partialintegrering:

$$\sqrt{2}\int_0^2 r^2 e^r\,dr = \sqrt{2}\left(\left[r^2e^r\right]_{r=0}^{r=2} - \int_0^2 2re^r\,dr\right) = 4\sqrt{2}e^2 - 2\sqrt{2}\left([re^r]_{r=0}^{r=2} - \int_0^2 e^r\,dr\right)$$
$$= 2\sqrt{2}\int_0^2 e^r\,dr = 2\sqrt{2}\,[e^r]_{r=0}^{r=2} = 2\sqrt{2}(e^2-1),$$

så vi har alltså att

$$\iint_D ye^{\sqrt{x^2+y^2}}\,dxdy = 2\sqrt{2}(e^2-1).$$

5. Funktionen är kontinuerlig på en kompakt mängd, samt partiellt deriverbar överallt, så enligt en känd sats finns globala maximum och minimum och dessa antas i inre stationära punkter eller på randen.

   Vi börjar med att bestämma de stationära punkterna. Vi får

$$\begin{cases} 0 = \frac{\partial f}{\partial x} = 2x-3 \\ 0 = \frac{\partial f}{\partial y} = 2y+3 \end{cases} \iff \begin{cases} x = 3/2 \\ y = -3/2. \end{cases}$$

   Den funna punkten $(x,y) = (3/2,-3/2)$ uppfyller $x^2+y^2 < 8$, så det är en inre punkt till området, och därmed en kandidat.

   Vi undersöker nu randen $x^2+y^2 = 8$, som är en cirkel med radie $\sqrt{8} = 2\sqrt{2}$. Vi parametriserar denna

$$\begin{cases} x = 2\sqrt{2}\cos t \\ y = 2\sqrt{2}\sin t \end{cases} \qquad t \in \mathbb{R}.$$

   Sätter vi in detta i funktionen får vi

$$h(t) = f(2\sqrt{2}\cos t, 2\sqrt{2}\sin t) = 8 + 3\sqrt{2}(\sin t - \cos t).$$

   Vi får $h'(t) = 3\sqrt{2}(\cos t + \sin t)$ så $h'(t) = 0$ om och endast om $\tan t = -1$, vilket ger $t = 3\pi/4$ eller $t = 7\pi/4$, inom ett varv av parametriseringen, så vi får kandidatpunkterna $(-2,2)$ respektive $(2,-2)$. Vi jämför funktionsvärdena:

(x,y)	$(3/2,-3/2)$	$(2,-2)$	$(-2,2)$
$f(x,y)$	$-9/2$	-4	20

   så minsta värdet är $f(3/2,-3/2) = -9/2$ och det största $f(-2,2) = 20$.

6. Differentialekvationen $2e^{-x}y' - y^3 = 0$ är separabel. Om vi skriver om den som $y^{-3}y' = \frac{1}{2}e^x$ och integrerar båda sidor får vi

$$\int y^{-3}\,dy = \frac{1}{2}\int e^x\,dx \iff -\frac{1}{2}y^{-2} = \frac{1}{2}e^x + C,$$

   så

$$\frac{1}{y^2} = D - e^x,$$

   (där $D = -2C$). Utnyttjar vi begynnelsevillkoret $y(0) = 1/2$ får vi $4 = D - e^0$, så $D = 5$, vilket ger

$$y = \pm\frac{1}{\sqrt{5-e^x}}.$$

   Villkoret $y(0) = 1/2$ igen ger att

$$y(x) = \frac{1}{\sqrt{5-e^x}}.$$

   Lösningen är bara definierad då $5 - e^x > 0$, vilket är ekvivalent med att $x < \ln 5$, dvs på intervallet $]-\infty, \ln 5[$.