MATEMATISKA INSTITUTIONEN
STOCKHOLMS UNIVERSITET
Avd. Matematik
Examinator: Martin Tamm

Tentamensskrivning i
Matematisk Analys,
problemlösning 7,5 hp,
220223

Inga hjälpmedel tillåtna. Motivera samtliga lösningar noga. 15 poäng (inklusive bonus) ger säkert godkänt.

1. Beräkna följande gränsvärden:

   a)
   $$\lim_{n\to\infty}\left(\sqrt{n^2+3n+5}-n\right).$$
   2 p

   b)
   $$\lim_{x\to 0}\frac{\arctan 2x - 2\arctan x}{e^{x^3}-1}.$$
   2 p

2. Undersök lokala och globala extremvärden, asymptoter och konvexitetsegenskaper hos kurvan $y = f(x)$ där
   $$f(x) = \ln|x+2| + 2\ln|x| + x.$$
   Skissera grafen. 5 p

3. Betrakta alla rektanglar, med sidorna parallella med koordinat-axlarna, som får plats mellan x-axeln och kurvan $y = e^{-x^2}$. Avgör om det finns någon sådan rektangel med maximal area, samt bestäm i så fall dess storlek. 5 p

4. Bestäm största och minsta värde till funktionen
   $$f(x,y) = 2x^2 - 4xy + y$$
   i området $\{(x,y) : x, y \geq 0 \text{ och } x+y \leq 1\}$. 5 p

5. Beräkna dubbelintegralen
   $$\iint_D (x+y)\,dxdy,$$
   där D är triangeln med hörn i punkterna $(0,0)$, $(1,2)$ och $(2,1)$. 5 p

6. a) Bestäm lösningen till begynnelsevärdesproblemet
   $$y'\cos x + y\sin x = \cos^3 x, \qquad y(\pi) = -1.$$
   3 p

   b) Bestäm den allmänna lösningen till differentialekvationen
   $$y'' - 2y' - 15y = 6e^{-x}.$$
   3 p

Information om skrivningsåterlämning ges av studentexpeditionen.

Lösningar till tentamen

Matematisk Analys, problemlösning 220223.

1.a) Vi förlänger med konjugatuttrycket:

$$\lim_{n\to\infty}\left(\sqrt{n^2+3n+5}-n\right)=$$

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\left(\sqrt{n^2+3n+5}-n\right)\left(\sqrt{n^2+3n+5}+n\right)}{\left(\sqrt{n^2+3n+5}+n\right)}$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{\left(n^2+3n+5\right)-n^2}{\sqrt{n^2+3n+5}+n}=$$

$$\lim_{n\to\infty}\frac{3n+5}{n\sqrt{1+3/n+5/n^2}+n}=$$

$$\lim_{n\to\infty}\frac{3+5/n}{\sqrt{1+3/n+5/n^2}+1}=\frac{3+0}{1+1}=\frac{3}{2}.$$

b) Vi använder MacLaurin-utveckling:

$$\arctan x = x-\frac{1}{3}x^3+O(x^5)$$

vilket ger $\arctan 2x-2\arctan x=$

$$(2x-\frac{8}{3}x^3+O(x^5))-2(x-\frac{1}{3}x^3+O(x^5))$$

$$=-2x^3+O(x^5).$$

På liknande sätt ger $e^t=1+t+O(t^2)$:

$$e^{x^3}-1=x^3+O(x^6).$$

Tillsammans ger dett

$$\frac{\arctan 2x-2\arctan x}{e^{x^3}-1}=\frac{-2x^3+O(x^5)}{x^3+O(x^6)}=$$

$$\frac{-2+O(x^2)}{1+O(x^3)}\to -2.$$

2. Funktionen är kontinuerlig i alla punkter utom $x=0$ och $x=-2$, där den har lodräta asymptoter eftersom

$$\lim_{x\to 0}f(x)=\lim_{x\to -2}f(x)=-\infty.$$

Vi ser också att

$$\lim_{x\to\pm\infty}\frac{f(x)}{x}=1,$$

men att

$$\lim_{x\to\pm\infty}(f(x)-x)=+\infty$$

varför sneda asymptoter saknas. Derivation ger

$$f'(x)=\frac{1}{x+2}+\frac{2}{x}+1=\frac{x^2+5x+4}{(x+2)x},$$

dvs $f'(x)=0\Rightarrow x^2+5x+4=0\Rightarrow x=-4\vee x=-1$. Vi får följande teckentabell:

x		-4		-2		-1		0	
f'	$+$	0	$-$	$\wr$	$+$	0	$-$	$\wr$	$+$
f	$\nearrow$	$5\ln 2-4$	$\searrow$	$-\infty$	$\nearrow$	-1	$\searrow$	$-\infty$	$\nearrow$

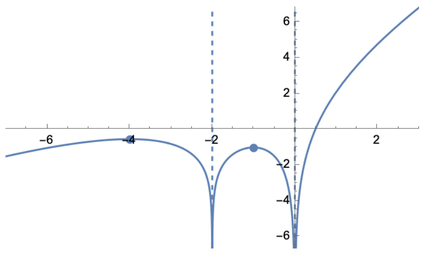
Både -4 och -1 är alltså lokala maxpunkter (med maxvärden $5\ln 2-4\approx -0,53$ och -1).

Globala extrempunkter saknas eftersom $\lim_{x\to\pm\infty}f(x)=\pm\infty$.

Genom att derivera en gång till får vi

$$f''(x)=D(\frac{1}{x+2}+\frac{2}{x}+1)=-\frac{1}{(x+2)^2}-\frac{2}{x^2}<0,$$

vilket ger att funktionen är konkav på alla de tre intervallen $]-\infty,-2[$, $]-2,0[$ och $]0,\infty[$ (men inte på någon större mängd).



3. Om en sådan rektangel har ett hörn på den positiva x-axeln i $(x,0)$, så kommer övriga hörn att ligga i $(-x,0)$, $-x,e^{-x^2})$ och (x,e^{-x^2}), och dess area blir

$$A(x)=2xe^{-x^2}.$$

För att bestämma maximum beräknar vi derivatan:

$$A'(x)=2e^{-x^2}-4x^2e^{-x^2}=(2-4x^2)e^{-x^2}.$$

Denna har ett unikt nollställe på den positiva delen av x-axeln i $x=\frac{1}{\sqrt{2}}$, och eftersom derivatan är positiv på vänster sida och negativ på höger sida är detta en global maxpunkt på $[0,\infty[$. Vi får maxvärdet

$$\max = A\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)=\sqrt{\frac{2}{e}}.$$

4. Eftersom

$$\frac{\partial f}{\partial x} = 4x - 4y,$$

$$\frac{\partial f}{\partial y} = -4x + 1,$$

så följer det att $\nabla f(x, y) = 0$ om och endast om $x = \frac{1}{4}, y = \frac{1}{4}$, som ger punkten $(\frac{1}{4}, \frac{1}{4})$. Denna ligger i området och är därför en möjlig extrempunkt. Värdet i denna punkt är $\frac{1}{8}$.

Randen till området består av tre segment som ligger på linjerna $x = 0$, $y = 0$, $x + y = 1$. Låt oss behandla dessa segment separat.

Om $x = 0$ så antar f samma värden som $h_1(t) = f(0, t) = t$, $0 \leq t \leq 1$, och $\max h_1 = 1$ och $\min h_1 = 0$.

Om $y = 0$ så antar f samma värden som $h_2(t) = f(t, 0) = 2t^2$, $0 \leq t \leq 1$, och $\max h_2 = 2$ och $\min h_2 = 0$.

Om $x+y = 1$ så antar f samma värden som $h_3(t) = f(t, 1-t) = 6t^2 - 5t + 1$, $0 \leq t \leq 1$. Vi får derivatan $h_3'(t) = 12t - 5$ med det unika nollstället $t = 5/12$ med funktionsvärdet $-1/24$. Eftersom $h_3(0) = 1$ och $h_3(1) = 2$ så följer att $\max h_3 = 2$ och $\min h_3 = -1/24$.

Om vi nu jämför max och min för h_1, h_2, h_3 med värdet i den stationär funktionen i det inre ser vi att maximum för f måste vara 2 och minimum $-1/24$.

5. Eftersom triangeln D är symmetrisk m a p x och y, så kan räkningarna förkortas något genom att observera att

$$\iint_D x\,dxdy = \iint_D y\,dxdy,$$

vilket ger att

$$I = \iint_D (x+y)\,dxdy = 2\iint_D x\,dxdy.$$

För att beräkna den sista integralen delar vi upp $D = D_1 \cup D_2$, där

$$D_1\{(x, y) : \frac{1}{2}x \leq y \leq 2x, 0 \leq x \leq 1\},$$

$$D_2\{(x, y) : \frac{1}{2}x \leq y \leq 3 - x, 1 \leq x \leq 2\},$$

Vi får

$$I = 2\iint_{D_1} x\,dxdy + 2\iint_{D_2} x\,dxdy$$

$$2\int_0^1 x\int_{\frac{1}{2}x}^{2x} dydx + 2\int_1^2 x\int_{\frac{1}{2}x}^{3-x} dydx =$$

$$2\int_0^1 x(2x - \frac{1}{2}x)dx + 2\int_1^2 x(3 - x - \frac{1}{2}x)dx =$$

$$\int_0^1 3x^2dx + \int_1^2 (6x - 3x^2)dx =$$

$$\Big[x^3\Big]_0^1 + \Big[3x^2 - x^3\Big]_1^2 = 3.$$

6.a) Ekvationen är linjär och vi delar med $\cos x$ för att få fram standardformen:

$$y' + y\tan x = \cos^2 x,$$

från vilken vi ser att $I.F. = e^{-\ln(\cos x)} = \frac{1}{\cos x}$ är en integrerande faktor. Efter multiplikation med denna kan ekvationen skrivas om:

$$\frac{y'}{\cos x} + \frac{y\sin x}{\cos^2 x} = \cos x \Leftrightarrow D\left(\frac{y}{\cos x}\right) = \cos x.$$

Integration ger:

$$\frac{y}{\cos x} = \sin x + C \Leftrightarrow y = \cos x\sin x + C\cos x.$$

Bivillkoret $y(\pi) = -1$ ger att $0 - C = -1$ dvs $C = 1$. Vi får alltså lösningen $y = \cos x\sin x + \cos x$.

b) Den karakteristiska ekvationen är

$$r^2 - 2r - 15 = 0$$

med de reella rötterna $r_1 = -3$ och $r_2 = 5$. Den homogena ekvationen har därför lösningen

$$y_h = C_1e^{-3x} + C_2e^{5x}.$$

En partikulärlösning kan sökas med ansatsen $y_p = ae^{-x}$, vilket ger $y_p' = -ae^{-x}$ och $y_p'' = ae^{-x}$. Insatt i ekvationen får vi

$$y_p'' - 2y_p' + 15y_p = ae^{-x} + 2ae^{-x} - 15ae^{-x} = -12ae^{-x},$$

som alltså ska sättas lika med högerledet $6e^{-x}$. Om vi nu jämför koefficienterna ser vi att $a = -\frac{1}{2}$. Detta ger partikulärlösningen $y_p = -\frac{1}{2}e^{-x}$.

Vi får alltså sammantaget den allmänna lösningen

$$y = y_h + y_p = C_1e^{-3x} + C_2e^{5x} - \frac{1}{2}e^{-x}.$$

/Martin Tamm/220223