Matematiska institutionen
STOCKHOLMS UNIVERSITET

Lösningsskisser till tentamen i Analys, Matematik I, den 16 december 2022

1. (a) Förlänger vi med konjugatuttrycket får vi

$$n\left(\sqrt{n^4+4n}-\sqrt{n^4+n}\right) = \frac{n\left((n^4+4n)-(n^4+n)\right)}{\sqrt{n^4+4n}+\sqrt{n^4+n}}$$
$$= \frac{3}{\sqrt{1+4/n^3}+\sqrt{1+1/n^3}} \to \frac{3}{1+1} = \frac{3}{2}.$$

då $n \to \infty$.

(b) Med standardutvecklingen $\arctan(t) = t - t^3/3 + O(t^5)$ då $t \to 0$ får vi

$$\frac{\arctan(x^2)-\arctan^2(x)}{x^4} = \frac{(x^2 - x^6/3 + O(x^{10})) - (x - x^3/3 + O(x^5))^2}{x^4}$$
$$= \frac{x^2 - x^6/3 + O(x^{10}) - (x^2 - 2x^4/3 + O(x^5))}{x^4}$$
$$= \frac{2x^4/3 + O(x^5)}{x^4} = \frac{2}{3} + O(x) \to \frac{2}{3}, \qquad \text{då } x \to 0.$$

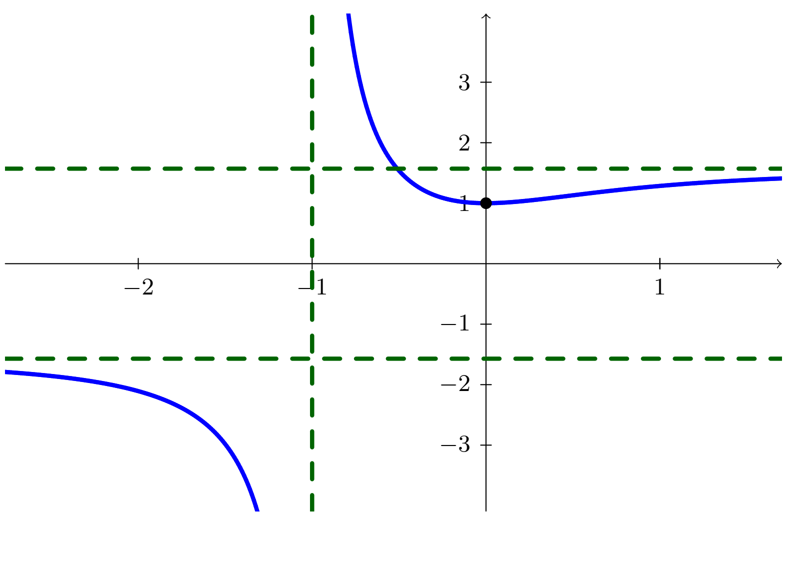
2. Den kontinuerliga funktionen $f(x) = \arctan(x) + \frac{1}{x+1}$ är definierad då $x \neq -1$. Den enda möjliga vertikala asymptoten är därmed $x = -1$, och eftersom vi får $\lim_{x\to -1-} f(x) = -\infty$ och $\lim_{x\to -1+} f(x) = \infty$ så $x = -1$ är en asymptot. Vi får vidare att $\lim_{x\to\pm\infty} f(x) = \pm\pi/2$, så $y = \pi/2$ och $y = -\pi/2$ är horisontella asymptoter. Derivering ger

$$f'(x) = \frac{1}{1+x^2} - \frac{1}{(x+1)^2} = \frac{2x}{(1+x^2)(1+x)^2},$$

så $f'(x) = 0$ om och endast om $x = 0$. Vi gör en teckentabell

x		-1		0	
$f'(x)$	-	$\wr$	-	0	+
$f(x)$	$\searrow$	$\wr$	$\searrow$	1	$\nearrow$

Från teckentabellen ser vi att funktionen bara har en lokal extrempunkt, ett lokalt minimum för $x = 0$. Vi skissar grafen, från vilken vi kan dra slutsatsen att de $a \in V_f$ där ekvationen $f(x) = a$ inte har en unik lösning är a med $1 < a < \pi/2$.



3. Vi betraktar halvcirkeln $x^2 + y^2 \leq R^2$, $y \geq 0$, och låter rektangelns hörn vara de fyra punkterna $(x, y) = (\pm a, 0)$ och $(\pm a, b)$, där $0 \leq a, b \leq R$ och $a^2 + b^2 = R^2$.

   Rektangelns omkrets blir då $l = 4a + 2b$. Löser vi ut b från sambandet $a^2 + b^2 = R^2$ får vi $b = \sqrt{R^2 - a^2}$, så

   $$l(a) = 4a + 2\sqrt{R^2 - a^2}, \qquad 0 \leq a \leq R.$$

   Funktionens maximum måste antas i intervallets ändpunkter eller i en stationär punkt. I ändpunkterna får vi $l(0) = 2R$ och $l(R) = 4R$. Man får

   $$l'(a) = 4 - \frac{2a}{\sqrt{R^2 - a^2}}.$$

   Löser man ekvationen $l'(a) = 0$ får man en enda stationär punkt $a = 2R/\sqrt{5}$ med $l(2R/\sqrt{5}) = 2\sqrt{5}R$. Detta är det största värdet och därmed den största möjliga omkretsen.

4. Lämpligen ritar man en figur av området D, och då ser man att det kan beskrivas av olikheterna $0 \leq y \leq 1$ och $-2y \leq x \leq 2y$, så

   $$\iint_D \sin(y^2)\,dxdy = \int_0^1 \left(\int_{-2y}^{2y} \sin(y^2)\,dx \right) dy = \int_0^1 4y \sin(y^2)\,dy =$$
   $$= \left[t = y^2,\ dt = 2y\,dy \right] = \int_0^1 2\sin(t)\,dt = [-2\cos(t)]_{t=0}^{t=1} = 2 - 2\cos(1).$$

5. Funktionen är kontinuerlig på en kompakt mängd, samt partiellt deriverbar överallt, så enligt en känd sats finns globala maximum och minimum och dessa antas i inre stationära punkter eller på randen.

   Vi börjar med att bestämma de stationära punkterna. Vi får

   $$\begin{cases} 0 = \frac{\partial f}{\partial x} = y - \frac{8x}{x^2+y^2} \\ 0 = \frac{\partial f}{\partial y} = x - \frac{8y}{x^2+y^2} \end{cases}$$

   vilket ger $y\frac{\partial f}{\partial x} - x\frac{\partial f}{\partial y} = y^2 - x^2 = 0$, så $y = \pm x$. Om $y = x$ får vi $x - \frac{4}{x} = 0$, så $x = \pm 2$, vilket ger $(x, y) = \pm(2, 2)$. Dessa punkter ligger dock inte i området eftersom $x^2 + y^2 = 8 > 2$. Om $y = -x$ får vi $x + \frac{4}{x} = 0$, som saknar reell lösning. Funktionen saknar alltså stationära punkter i området.

   Vi undersöker nu randkurvan $x^2 + y^2 = 2$ som är en cirkel med radie $\sqrt{2}$. Vi parametriserar denna genom $\begin{cases} x = \sqrt{2}\cos t \\ y = \sqrt{2}\sin t \end{cases}$ för $0 \leq t < 2\pi$. Sätter vi in detta i funktionen får vi

   $$h_1(t) = f(\sqrt{2}\cos t, \sqrt{2}\sin t) = 2\sin(t)\cos(t) - 4\ln(2) = \sin(2t) - 4\ln(2).$$

   Eftersom $-1 \leq \sin(t) \leq 1$ är maximum för $h_1(t)$ av $1 - 4\ln(2)$, och minimum av $-1 - 4\ln(2)$.

   Längs randen $x^2 + y^2 = 1$ får vi på motsvarande sätt $h_2(t) = f(\cos t, \sin t) = \sin(2t)/2$, som uppenbarligen har extremvärdena $\pm\frac{1}{2}$.

   Jämför vi dessa fyra värden får vi att maximum är $1/2$, och minimum $-1 - 4\ln(2)$.

6. (a) Vi multiplicerar den linjära differentialekvationen $y' + \frac{2}{x}y = \frac{2e^{x^2-1}}{x}$ med den integrerande faktorn $e^{2\ln(x)} = x^2$ och får då

$$\left(x^2 y\right)' = 2xe^{x^2-1}.$$

Integrerar vi båda sidor får vi $x^2 y = e^{x^2-1} + C$. Begynnelsevillkoret $y(1) = 2$ ger nu att $2 = 1 + C$, så $C = 1$, varmed $y(x) = \dfrac{e^{x^2-1}+1}{x^2}$.

(b) Differentialekvationen är separabel. Vi skriver om den som $\frac{1}{y(1-y)}\, y' = \frac{2}{x}$ och integrerar båda sidor med hjälp av partialbråksuppdelningen $\frac{1}{y(1-y)} = \frac{1}{y} - \frac{1}{1-y}$. Vi får $\ln\left|\frac{y}{1-y}\right| = 2\ln|x| + C$, vilket efter exponentiering ger $\frac{y}{1-y} = Dx^2$, där $D = \pm e^C$. Utnyttjar vi begynnelsevillkoret $y(1) = 1/2$ får vi $D = 1$, vilket ger $y = \dfrac{x^2}{1+x^2}$.