Matematiska institutionen
STOCKHOLMS UNIVERSITET

Lösningsskisser till tentamen i Analys, Matematik I, den 15 augusti 2023

1. (a) Förlänger vi med konjugatuttrycket får vi

$$n^3\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{\sqrt{n^2+4}}\right)=n^3\frac{\sqrt{n^2+4}-n}{n\sqrt{n^2+4}}=\frac{n^2}{\sqrt{n^2+4}}\left(\sqrt{n^2+4}-n\right)$$
$$=\frac{n^2}{\sqrt{n^2+4}}\frac{4}{\sqrt{n^2+4}+n}=\frac{4}{\sqrt{1+4/n^2}(\sqrt{1+4/n^2}+1)}\to\frac{4}{1\cdot(1+1)}=2.$$

då $n\to\infty$.

(b) Med standardutvecklingarna $\sin(t)=t-t^2/3!+O(t^5)$ och $\arctan(t)=t-t^3/3+O(t^5)$ då $t\to 0$ får vi

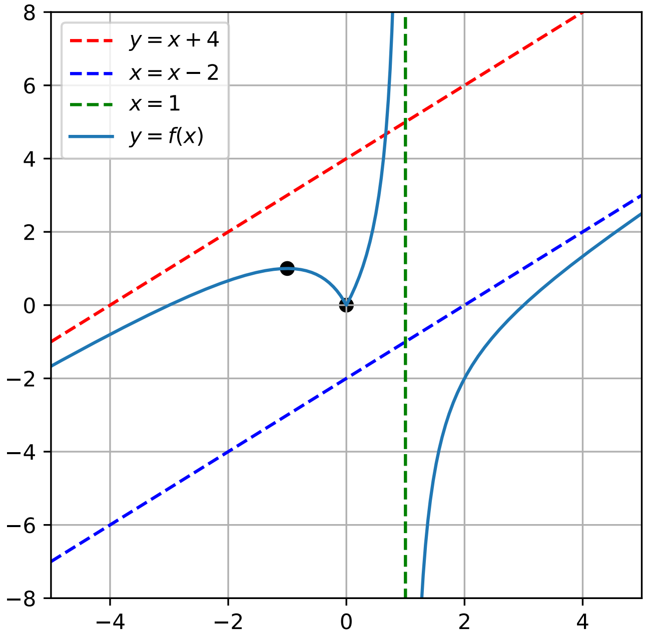
$$\frac{\pi\arctan(x)-\arctan(\pi x)}{2\sin(x)-\sin(2x)}=\frac{\pi(x-x^3/3+O(x^5))-(\pi x-(\pi x)^3/3+O(x^5))}{2(x-x^3/6+O(x^5)-(2x-(2x)^3/6+O(x^5)}$$
$$=\frac{(\pi^3-\pi)x^3/3+O(x^5)}{x^3+O(x^5)}=\frac{(\pi^3-\pi)/3+O(x^2)}{1+O(x^2)}\to\frac{\pi^3-\pi}{3}\quad\text{då } x\to 0.$$

2. Funktionen $f(x)=\frac{x^2-3|x|}{x-1}$ är definierad då $x\neq 1$. Den möjliga vertikala asymptoterna är därmed $x=1$, och eftersom vi får $\lim\limits_{x\to 1+}f(x)=-\infty$ och $\lim\limits_{x\to 1-}f(x)=\infty$ är det en asymptot. Vi får efter polynomdivision att $f(x)=\begin{cases}x-2-\frac{2}{x-1} & ;x>0\\ x+4-\frac{4}{x-1} & ;x<0\end{cases}$ vilket direkt ger att $y=x-2$ en sned asymptot då $x\to\infty$, och $y=x+4$ en sned asymptot då $x\to-\infty$.

Vi får att $f'(x)=\begin{cases}1+\frac{2}{(x-1)^2} & ;x>0\\ 1-\frac{4}{(x-1)^2} & ;x<0\end{cases}$ vilket enkelt ger att $f'(x)=0$ om och endast om $x=-1$. Vidare har vi $f''(x)=\begin{cases}\frac{-4}{(x-1)^3} & ;x>0\\ \frac{8}{(x-1)^3} & ;x<0\end{cases}$, så andraderivatan saknar nollställen. Vi gör en teckentabell:

x		-1		0		1	
$f'(x)$	+	0	-	≀	+	≀	+
$f(x)$	↗	1	↘	0	↗	≀	↗
$f''(x)$	-	-	-	≀	+	≀	-
$f(x)$	⌢	⌢	⌢		⌣	≀	⌢

Från denna ser vi att funktionen har ett lokalt maximum i $x=-1$, och ett lokalt minimum i $x=0$. Grafen är konkav på intervallen $]-\infty,0[$ och $]1,\infty]$, och konvex på $[0,1[$. Slutligen skissar vi grafen, från vilken vi kan dra slutsatsen at funktionens värdemängd är $\mathbb{R}$.



3. Lämpligen ritar man en figur av området D, och då ser man att det kan beskrivas av olikheterna $0 \leq y \leq \sqrt{\pi}$ och $-y/2 \leq x \leq y/2$, så

$$\iint_D \sin(y^2)\,dxdy = \int_0^{\sqrt{\pi}} \left(\int_{-y/2}^{y/2} \sin(y^2)\,dx \right) dy = \int_0^{\sqrt{\pi}} y \sin(y^2)\,dy =$$
$$= \Big[t = y^2,\ dt = 2y\,dy \Big] = \frac{1}{2} \int_0^{\pi} \sin(t)\,dt = \frac{1}{2} \Big[-\cos(t) \Big]_{t=0}^{t=\pi} = 1.$$

4. (a) Begränsningskurvorna $y = x^4$ och $x = y^2$ skär varandra då $x = 0$ och då $x = 1$, så området ges av

$$x^4 \leq y \leq \sqrt{x}, \qquad 0 \leq x \leq 1.$$

Om vi beräknar volymen som fås då den övre kurvan roterar kring x-axeln med skivformeln för rotationsvolym, och subtraherar volymen som genereras av den undre kurvan, får vi att volymen V_1 ges av

$$V_1 = \pi \int_0^1 \left(\sqrt{x}\right)^2 dx - \pi \int_0^1 \left(x^4\right)^2 dx = \pi \int_0^1 (x - x^8)\,dx = \pi \left[\frac{x^2}{2} - \frac{x^9}{9} \right]_0^1 = \frac{7\pi}{18}$$

(b) Med formeln för cylindriska skal (rörformiga element) får vi

$$V_2 = 2\pi \int_0 x(\sqrt{x} - x^4)\,dx = 2\pi \int_0^1 (x^{3/2} - x^5)\,dx = 2\pi \left[\frac{x^{5/2}}{5/2} - \frac{x^6}{6} \right]_0^1 = \frac{7\pi}{15}.$$

5. Funktionen är kontinuerlig på en kompakt mängd, samt partiellt deriverbar överallt, så enligt en känd sats finns globala maximum och minimum och dessa antas i inre stationära punkter eller på randen.

Vi börjar med att bestämma de stationära punkterna. Vi får

$$\begin{cases} 0 = \frac{\partial f}{\partial x} = 2x + \frac{2x}{x^2+y^2} \\ 0 = \frac{\partial f}{\partial y} = -2y + \frac{2y}{x^2+y^2} \end{cases} .$$

Den första av dessa ekvationer ger att $x = 0$, varvid den andra ekvationen ger $y = \pm 1$. Vi får de stationära punkterna $(x, y) = (0, \pm 1)$, som visserligen tillör området men inte är inre punkter utan randpunkter.

Vi undersöker nu randkurvan $x^2 + y^2 = 4$ som är en cirkel med radie 2. Vi paramet-riserar denna genom $\begin{cases} x = 2\cos t \\ y = 2\sin t \end{cases}$ för $0 \le t < 2\pi$. Sätter vi in detta i funktionen får vi

$$h_1(t) = f(2\cos t, 2\sin t) = 4\cos^2(t) - 4\sin^2(t) + \ln(4).$$

Derivering ger $h_1'(t) = -16\sin(t)\cos(t) = -8\sin(2t)$, så på intervallet $[0, 2\pi[$ får vi 4 nollställen till $h_1'(t)$, vilket ger punkterna $(0, \pm 2)$ och $(\pm 2, 0)$.

Längs randen $x^2 + y^2 = 1$ får vi på motsvarande sätt de stationära punkterna $(0, \pm 1)$ och $(\pm 1, 0)$.

Vi jämför funktionsvärdena:

(x, y)	$(0, \pm 1)$	$(\pm 1, 0)$	$(0, \pm 2)$	$(\pm 2, 0)$
$f(x, y)$	1	-1	$-4 + \ln(4)$	$4 + \ln(4)$

så minsta värdet är $f(0, \pm 2) = -4 + \ln(4)$ och det största $f(\pm 2, 0) = 4 + \ln(4)$.

6. (a) Differentialekvationen är separabel. Om vi skriver om den som $\frac{y'}{y(y-2)} = \frac{x}{1+x^2}$ med hjälp av partialbråksuppdelningen $\frac{1}{y(y-2)} = \frac{-1/2}{y} + \frac{1/2}{y-2}$ och integrering av båda sidor får vi att $\frac{1}{2}\ln\left|\frac{y-2}{y}\right| = \frac{1}{2}\ln(1+x^2) + C$, vilket ger $\frac{y-2}{y} = A(1+x^2)$, där $A = \pm e^C$. Utnyttjar vi begynnelsevillkoret $y(0) = 1$ får vi $A = -1$, vilket ger att $y(x) = \dfrac{2}{2+x^2}$.

   (b) Vi börjar med att lösa den homogena ekvationen $y_h'' - 3y_h' + 2y_h = 0$. Den karakteristiska ekvationen är $r^2 - 3r + 2 = 0$, med lösningar $r = 1$ och $r = 2$, så $y_h = Aa^x + Be^{2x}$, för $A, B \in \mathbb{R}$.

   Vi ansätter en partikulärlösning $y_p = Ce^x$, vilket insatt i ekvationen ger att $C = 1/6$, så den allmänna lösningen till differentialekvationen är därmed $y = y_p + y_h = \frac{1}{6}e^{-x} + Ae^x + Be^{2x}$. Vi får $y' = -\frac{1}{6}e^{-x} + Aa^x + 2Be^{2x}$, så begynnelsevillkoren ger $y(0) = 1/6 + A + B = 0$ resp. $y'(0) = -1/6 + A + 2B = 0$, vilket ger $B = 1/3$ och $A = -1/2$, så

$$y(x) = \frac{1}{6}\left(e^{-x} - 3e^x + 2e^{2x}\right).$$