Matematik för naturvetenskaper II

Tentamen 4 maj 2023

① (a) Euklides algoritm:

$$114 = 4\cdot 24 + 18,$$
$$24 = 1\cdot 18 + 6,$$
$$18 = 3\cdot 6 + 0,$$

därmed $SGD(114,24) = 6$, vilket delar HL 42.

Lös ut resterna:

$$6 = 24 - 1\cdot 18,$$
$$18 = 114 - 4\cdot 24,$$

därför

$$6 = 24 - 1\cdot(114 - 4\cdot 24) = 24\cdot 5 + 114\cdot(-1).$$

$\Rightarrow (5,-1)$ löser $24x + 114y = 6$.

Den ursprungliga ekvationen har ju en lösning

$$(x_0, y_0) = (35, -7),$$

då $6\cdot 7 = 42$. Dessutom är den ekvivalent (dela i 6) med $4x + 19y = 7$, och $SGD(4,19) = 1$.

Allmän lösning:

$$\begin{cases} x = 35 - 19n \\ y = -7 + 4n \end{cases} \qquad n \in \mathbb{Z}.$$

(b) $SGD(27,3) \nmid 478593211$, då

$4+7+8+5+9+3+2+1+1 = 40$, ej delbart med 3.

$\Rightarrow$ ingen lösning.

② (a) $f(x) = \sqrt{1+4x}$

$$f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{1+4x}} 4 = 2(1+4x)^{-1/2}$$

$$f''(x) = -(1+4x)^{-3/2} \cdot 4$$

Maclaurinpolynom:

$$P_2(x) = f(0) + f'(0)x + \frac{f''(0)}{2}x^2$$

$$= 1 + 2x - 2x^2$$

(b) Enligt Taylors sats finns det ξ mellan 0 och x sådant att

$$r_2(x) = f(x) - p_2(x) = \frac{f'''(\xi)}{3!}x^3.$$

$$\Rightarrow |r_2(x)| = \left| \frac{\frac{3}{2}(1+4\xi)^{-5/2} \cdot 16}{3!} x^3 \right|.$$

Om $0 \leq x \leq 0{,}1$ så är också $\xi \geq 0$, därmed

$$|(1+4\xi)|^{-5/2} = \frac{1}{|1+4\xi|^{5/2}} \leq 1.$$

$$\Rightarrow |r_2(x)| \leq 4|x|^3 \leq 4 \cdot 0{,}1^3 = 4 \cdot 10^{-3}.$$

(3) Induktionsbas: För $n=1$:

$$a_1 = 2, \qquad n\cdot 2^n = 2, \qquad \text{lika.}$$

Induktionsantagande: För något $n\in\mathbb{N}$ gäller

$$a_n = n2^n.$$

Induktionssteg: Vi vill visa att

$$a_{n+1} = (n+1)2^{n+1}.$$

Enligt definitionen av (a_n) och antagandet:

$$a_{n+1} = 2\frac{n+1}{n}a_n = 2\frac{n+1}{n}n2^n = (n+1)2^{n+1}.$$

Med induktionsprincipen följer $a_n = n2^n \ \forall n\in\mathbb{N}$.

④ (a) $\iint_{D_1} x^2 y \, dx\, dy = \int_0^1 \int_0^{3-2x} x^2 y \, dy\, dx$

$$= \int_0^1 \frac{1}{2} \left[x^2 y^2 \right]_{y=0}^{3-2x} dx$$

$$= \frac{1}{2} \int_0^1 x^2 (3-2x)^2 \, dx$$

$$= \frac{1}{2} \int_0^1 x^2 (9 - 12x + 4x^2) \, dx$$

$$= \frac{1}{2} \int_0^1 (9x^2 - 12x^3 + 4x^4) \, dx$$

$$= \frac{1}{2} \left[3x^3 - 3x^4 + \frac{4}{5} x^5 \right]_0^1$$

$$= \frac{1}{2} \cdot \frac{4}{5} = \underline{\underline{\frac{2}{5}}}.$$

(b) Polära koordinater: $\begin{cases} x = r\cos\theta, & 0 \le r \le 2, \\ y = r\sin\theta, & 0 \le \theta \le \frac{\pi}{4}. \end{cases}$

$$\iint_{D_2} xy \, dx\, dy = \int_0^2 \int_0^{\frac{\pi}{4}} r\cos\theta \, r\sin\theta \, r \, d\theta \, dr$$

$$= \int_0^2 r^3 \, dr \int_0^{\frac{\pi}{4}} \underbrace{\cos\theta \sin\theta}_{= \frac{1}{2}\sin(2\theta)} \, d\theta$$

$$= \left[\frac{1}{4} r^4 \right]_0^2 \left[-\frac{1}{4} \cos(2\theta) \right]_0^{\frac{\pi}{4}}$$

$$= 4 \cdot \left(-\frac{1}{4} \right) \left(\cos\frac{\pi}{2} - \cos 0 \right) = \underline{\underline{1}}$$

5 (a) För $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2$, P projektionen på $x-2y=0$:

$$P\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} - \frac{\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \cdot \vec{n}}{|\vec{n}|^2}\vec{n},$$

där $\vec{n}$ är normal på planet. En sådan vektor är

$$\vec{n} = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix}.$$

$$\Rightarrow P\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} - \frac{x-2y}{1^2+(-2)^2}\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} - (x-2y)\begin{pmatrix} 1/5 \\ -2/5 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 4/5x + 2/5y \\ 2/5x + 1/5y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4/5 & 2/5 \\ 2/5 & 1/5 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

$\Rightarrow$ matrisframställningen är $\frac{1}{5}\begin{pmatrix} 4 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$.

(b) För standardbasen $\mathbb{B}_{st}$ och basbytesmatrisen B från $\mathbb{B}$ till $\mathbb{B}_{st}$ är följande diagram kommutativt:

$$\begin{tikzcd}
(\mathbb{R}^3, \mathbb{B}_{st}) \arrow[r, "A"] \arrow[d, "B^{-1}"] & (\mathbb{R}^3, \mathbb{B}_{st}) \\
(\mathbb{R}^3, \mathbb{B}) \arrow[r, "A_{\mathbb{B}}"] & (\mathbb{R}^3, \mathbb{B}) \arrow[u, "B"']
\end{tikzcd}$$

$$\Rightarrow A_{\mathbb{B}} = B^{-1}AB.$$

För $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ vektor i $\mathbb{B}_{st}$ och $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ koordinater i $\mathbb{B}$:

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \lambda_1\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} + \lambda_2\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \lambda_3\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \lambda_2 \\ \lambda_3 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Beräkning av B^{-1}:

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 2 & 0 & 1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

$$\sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 1/2 & 1/2 & -1/2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1/2 & -1/2 & -1/2 \\ 0 & 1 & 0 & 1/2 & 1/2 & -1/2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

$$\Rightarrow \mathbb{B}^{-1} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow A_{\mathbb{B}} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \\ 2 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$= \frac{1}{2}\begin{pmatrix} -1 & 1 & -3 \\ -1 & 3 & 1 \\ 4 & 0 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$= \frac{1}{2}\begin{pmatrix} -2 & 0 & -4 \\ -4 & 2 & 0 \\ 4 & 4 & 6 \end{pmatrix} = \underline{\underline{\begin{pmatrix} -1 & 0 & -2 \\ -2 & 1 & 0 \\ 2 & 2 & 3 \end{pmatrix}}}$$

(6) (a) $\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = e^{y^2}$, $\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = 2xye^{y^2}$,

Tangentplanet i $(x_0, y_0, f(x_0,y_0))$:

$$z = x_0 e^{y_0^2} + e^{y_0^2}(x - x_0) + 2x_0y_0e^{y_0^2}(y-y_0)$$

$$= e^{y_0^2}(x + 2x_0y_0y - 2x_0y_0^2).$$

(b) Tangentplanet har en normalvektor

$$\vec{n} = \begin{pmatrix} e^{y_0^2} \\ 2x_0y_0e^{y_0^2} \\ -1 \end{pmatrix},$$

medan $\vec{n_0} = \begin{pmatrix} -2e \\ -16e \\ 2 \end{pmatrix}$ är normal till andra planet.

För att planen sammanfaller, krävs först

$$\vec{n_0} = \lambda\vec{n}, \quad \text{dvs.} \quad \begin{pmatrix} -2e \\ -16e \\ 2 \end{pmatrix} = \lambda \begin{pmatrix} e^{y_0^2} \\ 2x_0y_0e^{y_0^2} \\ -1 \end{pmatrix}$$

för något $\lambda \in \mathbb{R}$. Sista rad ger $\underline{\lambda = -2}$. Då

$$\begin{cases} -2e = -2e^{y_0^2} \\ -16e = -4x_0y_0e^{y_0^2} \end{cases}$$

Första ekvation: $y_0 = \pm 1$.

Andra ekvation: Fall $y_0 = -1$: $-16e = 4x_0e \Rightarrow x_0 = -4$

Fall $y_0 = 1$: $-16e = -4x_0e \Rightarrow x_0 = 4$

$\Rightarrow (x_0,y_0) = (-4,-1)$ samt $(x_0,y_0) = (4,1)$

är punkterna där planen är parallella.

Sammanfaller de?

Räcker att kolla om $(x_0, y_0, f(x_0,y_0))$ ligger i planet

$-2ex - 16ey + 2z + 16e = 0.$

Fall $(x_0, y_0) = (-4, -1)$: $z_0 = f(x_0,y_0) = -4e$

$-2ex_0 - 16ey_0 + 2z_0 + 16e = 8e + 16e - 8e + 16e$

$= 32e \neq 0$

$\Rightarrow (-4,-1)$ ligger ej i planet.

Fall $(x_0, y_0) = (4, 1)$: $z_0 = f(x_0, y_0) = 4e,$

$-2ex_0 - 16ey_0 + 2z_0 + 16e = -8e - 16e + 8e + 16e = 0$

$\Rightarrow (4,1)$ ligger i planet.

$\Rightarrow$ Den enda punkten, där planen sammanfaller, är $(x_0, y_0) = (4, 1)$.