STOCKHOLMS UNIVERSITET
Matematiska institutionen
MM4001 Matematik för naturvetenskaper II
Examinator: Jonathan Rohleder

Tentamensskrivning
2023-08-10

Tillåtna hjälpmedel: inga. Samtliga svar måste motiveras. 15 poäng ger säkert minst betyget E.

---

1. **(4 p.)** Finn alla lösningar till den diofantiska ekvationen
$$47x + 726y = 10.$$

2. **(2+3 p.)** (a) Bestäm Taylorpolynomet p_2 av grad 2 med utvecklingspunkt $x_0 = \frac{\pi}{2}$ till funktionen
$$f(x) = x\cos x - 3\sin x.$$
(b) Använd resultatet av (a) för att bestämma en approximation av $f(\frac{\pi}{2} - 0,07)$. Visa dessutom att felet vid denna approximation är högst 10^{-4}, dvs.
$$\left| f\left(\frac{\pi}{2} - 0,07\right) - p_2\left(\frac{\pi}{2} - 0,07\right) \right| \leq 10^{-4}.$$

3. **(4 p.)** Låt matrisen A vara given som $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$. Bevisa med induktion att
$$A^n = \begin{pmatrix} 1 & 3^n - 1 \\ 0 & 3^n \end{pmatrix}$$
gäller för $n = 1, 2, 3, \ldots$, dvs. för alla positiva heltal.

4. **(3+3 p.)** (a) Beräkna dubbelintegralen
$$\iint_{D_1} xy \, \mathrm{d}x\mathrm{d}y,$$
där D_1 är området i planet som begränsas av kurvorna $y = x^2$ och $x = y^2$.
(b) Beräkna $\iint_{D_2} \sqrt{1 - (x^2 + y^2)} \, \mathrm{d}x\mathrm{d}y$, där $D_2 = \{(x, y) : x^2 + y^2 \leq 1\}$.

5. **(3+3 p.)** (a) Med avseende på en ON-bas, låt P beteckna den ortogonala projektionen på planet $2x - y + z = 0$ i rummet. Beräkna matrisframställningen till P. Är P inverterbar?
(b) Betrakta den linjära avbildningen $F : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ som i standardbasen ges av
$$F\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6x + 5y \\ -x + 2y \end{pmatrix}.$$
Vilken matrisframställning har F i basen $\mathbb{B} = \left(\binom{1}{2}, \binom{1}{-2}\right)$?

6. **(2+3 p.)** Låt $f(x, y) = x^3 - 2xy^2 + y + 4$.
(a) Beräkna tangentplanet till grafen $z = f(x, y)$ i punkten $(1, 1, 4)$.
(b) Bestäm parametern $\theta \in [0, 2\pi]$ sådan att tangentplanet i (a) inte har någon gemensam punkt med planet $z = (3\cos\theta - \sin\theta)x + (3\sin\theta + \cos\theta)y$.

Tentamensåterlämning annonseras på kurshemsidan.

Lycka till!