STOCKHOLMS UNIVERSITET
MATEMATISKA INSTITUTIONEN
Avd. Matematisk statistik

TENTAMEN
17 mars 2022

Tentamen i Stokastiska processer och simulering I

17 mars 2022 kl. 14–19

Examinator: Maria Deijfen, 070-3369790.
Tillåtna hjälpmedel: Formelsamling och miniräknare som delas ut med tentan.
Återlämning: Resultat läggs in i Ladok senast torsdag 31 mars.

Varje korrekt löst uppgift ger 10 poäng. För godkänt betyg krävs minst 20 poäng på basdelen. Den svårare delen rättas endast om basdelen är godkänd och betyget sätts då utifrån poängen på den svårare delen: E:0-6, D:7-12, C:13-18, B:19-24, A:25-30. Resonemang skall vara klara och tydliga att följa. Införda beteckningar ska definieras.

Basdel

Uppgift 1

Den stokastiska variabeln X är exponentialfördelad med parameter λ och, givet att $X = x$, så är Y Poissonfördelad med parameter x.

a) Bestäm $\mathbf{E}[X]$.

b) Bestäm $\mathrm{Var}(Y)$.

c) Ange $\mathbb{P}(Y = 0)$.

Uppgift 2

En Markovkedja i diskret tid har sex tillstånd numrerade 1 till och med 6. Övergångsmatrisen (med tillstånden ordnade i nummerordning) ges av

$$\mathbf{P} = \begin{pmatrix} 0 & 0.5 & 0.5 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0.3 & 0.7 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

a) Dela in kedjans tillstånd i klasser och ange vilka klasser som är rekurrenta respektive transienta.

b) Är någon eller några av klasserna periodiska? Vad är i så fall deras period?

Uppgift 3

Antag att i genomsnitt två barn per timme föds på en stor BB-avdelning (som inte hanterar flerbarnsfödslar) och att födslarna sker enligt en Poissonprocess. Vad är sannolikheten ett givet dygn (som startar vid midnatt) att:

a) det första barnet föds innan kl 00.30?

b) exakt fyra barn föds mellan kl 9 och 11?

c) minst ett barn föds mellan kl 16 och 17 och minst ett mellan kl 18 och 20?

Svårare del

Uppgift 4

En viss typ av amöba förekommer i tre olika underarter: röda, gula och blå. Varje amöba förökar sig oberoende av andra genom delning en gång per dygn. De två delarna överlever oberoende av varandra med sannolikhet 0.75 och en ny amöba får samma färg som dess förälder hade. Just nu består amöbakolonin av tre amöbor, en av varje färg.

a) Vad är det förväntade antalet amöbor efter fem dygn?

b) Vad är sannolikheten att de gula amöborna så småningom dör ut?

c) Vad är sannolikheten att amöbakolonin aldrig dör ut, men att alla amöbor så småningom har samma färg?

Uppgift 5

Den kontinuerliga stokastiska variabeln X har täthetsfunktion $f_X(x) = 2(1-x)$ på intervallet $0 \leq x \leq 1$ (och $f_X(x) = 0$ annars). En statistiker vill simulera oberoende utfall av variabeln X, men har till sitt förfogande endast en slumptalsgenerator som ger slumptal U som är oberoende och likformigt fördelade på intervallet $[0, 1]$. Hjälp statistikern att hitta en funktion f sådan att $f(U)$ har den önskade fördelningen.

Uppgift 6

Kunder anländer parvis till en tvättomat med två tvättmaskiner. Paren anländer enligt en Poissonprocess med intensitet λ par per timme och om inrättningen är tom så lägger de genast in tvätten i varsin tvättmaskin, är inrättningen inte tom så går de därifrån. Tvättiderna för maskinerna är oberoende och exponentialfördelade med väntevärde $1/\mu$ timme. Den första i paret som är färdig med sin tvätt väntar tills den andra också är färdig och de lämnar därefter inrättningen tillsammans.

a) Hur stor andel av tiden är tvättomaten tom i långa loppet om $\lambda = \mu = 2$?

b) Om $\mu = 2$, hur stort kan λ vara om man vill gå miste om högst hälften av kunderna?

Lycka till!