STOCKHOLMS UNIVERSITET
MATEMATISKA INSTITUTIONEN
Avd. Matematisk statistik, MD

LÖSNINGAR
17 mars 2022

# Lösningar

## 17 mars 2022

---

### Uppgift 1

**a)** Här hade jag tänkt att det skulle stå $Y$ istället för $X$. Man hade då löst det med hjälp av betingning: $\mathbb{E}[Y] = \mathbb{E}[\mathbb{E}[Y|X]] = \mathbb{E}[X] = 1/\lambda$. Nu blev det ett $X$ istället och då räcker det att konstatera att $X$ är exponentialfördelad och hämta väntevärdet från tabellen (sista steget ovan).

**b)** $\mathrm{Var}(Y) = \mathbb{E}[\mathrm{Var}(Y|X)] + \mathrm{Var}(\mathbb{E}[Y|X]) = \mathbb{E}[X] + \mathrm{Var}(X) = \frac{1+\lambda}{\lambda^2}$.

**c)** $P(Y=0) = \int_0^\infty P(Y=0|X=x) f_X(x)dx = \int_0^\infty e^{-x} \cdot \lambda e^{-\lambda x} dx = \frac{\lambda}{1+\lambda}$.

### Uppgift 2

Tillstånden kommunicerar med varandra på följande vis:

$$\begin{array}{ccccccccc} 2 & \longleftrightarrow & 1 & \longrightarrow & 3 & \longrightarrow & 4 & \longrightarrow & 5 \\ & & & & \circlearrowright & & \nwarrow & & \swarrow \\ & & & & & & & 6 & \end{array}$$

Det innebär att kedjans klasser är:
$\{1,2\}$: transient med period 2
$\{3\}$: transient och aperiodisk
$\{4,5,6\}$: rekurrent med period 3

## Uppgift 3

Låt $N(t)$ beteckna antalet födslar i $[0, t)$ (där $t = 0$ är dygnets början). Då gäller att $N(t) \sim \text{Po}(2t)$.

**a)** $\mathbb{P}(N(0.5) \geq 1) = 1 - \mathbb{P}(N(0.5) = 0) = 1 - e^{-1} = 0.632$.

**b)** Vi får att $\mathbb{P}(N(11) - N(9) = 4) = \mathbb{P}(N(2) = 4) = \frac{4^4}{4!}e^{-4} = 0.195$, där vi i den första likheten har utnyttjat att processen har stationära inkrement.

**c)** Vi söker $\mathbb{P}(\{N(17) - N(16) > 0\} \cap \{N(20) - N(18) > 0\})$. Eftersom processen har oberoende och stationära inkrement så ges den sökta sannolikheten av $\mathbb{P}(N(1) > 0)\mathbb{P}(N(2) > 0) = (1 - e^{-2})(1 - e^{-4}) = 0.849$.

## Uppgift 4

Amöbakolonins tillväxt kan beskrivas av en förgreninsprocess med Bin(2,0.75)-fördelad avkomma.

**a)** Det förväntade antalet amöbor av en given färg efter $n$ dygn är $\mu^n$, där $\mu$ betecknar väntevärdet i avkommefördelningen. Vi har $\mu = 1.5$ och det förväntade totala antalet amöbor efter fem dygn blir alltså $3 \cdot (1.5)^5 = 22.8$.

**b)** Den sökta sannolikheten ges av den minsta positiva roten till ekvationen $p_2x^2 + p_1x + p_0 = x$, där $\{p_i\}$ är avkommefördelningen. Ekvationen blir $x^2 - \frac{10}{9}x + \frac{1}{9} = 0$, som har lösningarna $x = 1/9$ och $x = 1$. Den sökta sannolikheten är alltså $1/9$.

**c)** Den sökta sannolikheten ges av $\mathbb{P}(\text{alla får samma färg}) = \mathbb{P}(\text{alla gula}) + \mathbb{P}(\text{alla röda}) + \mathbb{P}(\text{alla blåa}) = 3 \cdot \mathbb{P}(\text{alla gula}) = 3 \cdot \mathbb{P}(\text{röd dör ut}) \cdot \mathbb{P}(\text{blå dör ut}) \cdot \mathbb{P}(\text{gul dör ut}) = 3 \cdot \frac{1}{9^2} \cdot \frac{8}{9} = 0.33$. Här har vi utnyttjat att amöborna reproducerar sig oberoende av varandra och att den gula, röda och blå kolonin alltså utvecklas oberoende av varandra.

## Uppgift 5

Enligt teorin ska $f$ väljas som inversen till fördelningsfunktionen $F$ för $X$. Vi får för $0 \leq x \leq 1$ att

$$F(x) = \int_0^x 2(1-t)dt = 2x - x^2.$$

Ansatsen $u = 2x - x^2$ ger $x = 1 \pm \sqrt{1-u}$, och eftersom $x$ ligger mellan 0 och 1 så kan inte plustecknet komma ifråga. Den sökta funktionen är alltså $f(U) = 1 - \sqrt{1-U}$ (vilket om man vill kan förenklas till $f(U) = 1 - \sqrt{U}$, ty om $U$ är likformigt fördelad på intervallet (0,1) så har $1 - U$ samma fördelning).

## Uppgift 6

Processen kan beskrivas av en Markovkedja i kontinuerlig tid med tillstånden

0: tvättomaten är tom
1: ett par befinner sig i tvättomaten och en maskin är igång
2: ett par befinner sig i tvättomaten och båda maskiner är igång.

De möjliga övergångar är $0 \to 2$ (med intensitet $\lambda$), $2 \to 1$ (med intensitet $2\mu$, eftersom tiden tills någon av maskinerna är klar ges av minimum av två oberoende exponentialvariabler med parameter $\mu$, vilket en exponentialvariabel med parameter $2\mu$) och $1 \to 0$ (med intensitet $\mu$). Intensitetsmatrisen (där vi skriver intensiteterna med vilka vi rör oss mellan tillstånden utanför diagonalen, och den sammanlagda intensiteten med vilken vi lämnar tillståndet med omvänt tecken på diagonalen) ges av

$$\mathbf{Q} = \begin{bmatrix} -\lambda & 0 & \lambda \\ \mu & -\mu & 0 \\ 0 & 2\mu & -2\mu \end{bmatrix}.$$

Eftersom kedjan är ändlig och irreducibel så existerar en gränsfördelning $\pi = (\pi_1, \pi_2, \pi_3)$ som bestäms av $\pi Q = 0$ (balansekvationerna) tillsammans med villkoret att $\pi_1 + \pi_2 + \pi_3 = 1$. Vi får $\pi = \frac{2\mu}{2\mu+3\lambda}(1, \frac{\lambda}{\mu}, \frac{\lambda}{2\mu})$.

**a)** För $\lambda = \mu = 2$ får vi att $p_0 = 0.4$. Tvättomaten är alltså tom 40% av tiden i långa loppet.

**b)** Den andel av kunderna som man går miste om ges av $1 - p_0 = \frac{3\lambda}{2\mu+3\lambda}$. Om detta inte ska överstiga 0.5 då $\mu = 2$ så måste det gälla att $\lambda \leq 4/3$.