STOCKHOLMS UNIVERSITET
MATEMATISKA INSTITUTIONEN
Avd. Matematisk statistik, MD

LÖSNINGAR
20 april 2022

Lösningar

20 april 2022

Uppgift 1

a) Låt X_n beteckna den anställdes arbetsplats dag n, där $X_n = 1$ svarar mot plats A, $X_n = 2$ mot plats B och $X_n = 3$ mot plats C. Då är $\{X_n\}$ en Markovkedja med övergångmatris

$$\mathbf{P} = \begin{pmatrix} 0 & 1/2 & 1/2 \\ 1/3 & 0 & 2/3 \\ 1/3 & 2/3 & 0 \end{pmatrix}.$$

b) Den asymptotiska fördelningen $\pi = (\pi_1, \pi_2, \pi_3)$ fås som lösning till ekvationssystemet $\pi = \pi\mathbf{P}$ tillsammans med kravet att $\pi_1 + \pi_2 + \pi_3 = 1$:

$$\begin{cases} \frac{1}{3}\pi_2 + \frac{1}{3}\pi_3 &= \pi_1 \\ \frac{1}{2}\pi_1 + \frac{2}{3}\pi_3 &= \pi_2 \\ \frac{1}{2}\pi_1 + \frac{2}{3}\pi_2 &= \pi_3 \\ \pi_1 + \pi_2 + \pi_3 &= 1. \end{cases}$$

Man får att $\pi_1 = (1/4, 3/8, 3/8)$, dvs andelen dagar som tillbringas vid de olika platserna är 1/4, 3/8 respektive 3/8.

Uppgift 2

a) Det sammanlagda antalet besökare (oavsett kön) utgör en Poissonprocess med intensitet $\lambda_m + \lambda_k$. Antalet ankomster under de två första timmarna är alltså Poissonfördelat med paramter $2(\lambda_m + \lambda_k)$.

b) Exponentialfördelad med parameter $\lambda_m + \lambda_k$.

c) Låt T_m och T_k vara tiderna då den första mannen respektive kvinnan anländer. Då gäller att $T_m \sim$Exp(λ_m) och $T_k \sim$Exp(λ_k) och den sökta sannolikheten ges av $\mathbb{P}(T_k \leq T_m) = \lambda_k/(\lambda_m + \lambda_k)$.

d) Eftersom exponentialfördelningen är minneslös gäller att $\mathbb{P}(T_m > 0.5 + s|T_m > 0.5) = \mathbb{P}(T_m > s)$, dvs tiden räknat från kl 8.30 tills den första mannen anländer är fortfarande exponentialfördelad med parameter λ_m.

Uppgift 3

En förgreningsprocess dör ut med sannolikhet 1 om den förväntade avkomman är mindre än 1. Är den förväntade avkomman större än 1 ges utdöendesannolikheten π av den minsta positiva roten till ekvationen $\sum_{i=0}^{\infty} \pi^i p_i = \pi$, där $\{p_i\}$ betecknar avkommefördelningen.

a) Här har vi att $\mathbb{E}[Y] = 6 \cdot 0.1 = 0.6 < 1$, vilket medför att processen dör ut med sannolikhet 1.

b) Här har vi att $\mathbb{E}[Y] = 1.3$. Ekvationen som bestämmer π blir $\pi^2 - 1.4\dot{\pi} + 0.4 = 0$, som har lösningarna $\pi = 0.4$ och $\pi = 1$. Den sökta sannolikheten är alltså 0.4.

Uppgift 4

Låt X_t beteckna antalet bilar i systmet (köande + den vid pumpen) vid tid t. Då är $\{X_t\}$ en födelse-dödsprocess i kontinuerlig tid med födelseintensiteter $\lambda_0 = 20$, $\lambda_1 = 20 \cdot 0.5 = 10$ och $\lambda_n = 0$ för $n \geq 2$, och dödsintensiteter $\mu_1 = \mu_2 = \mu$, där μ är okänt. Vi vill bestämma $\rho = 1/\mu$, som är den genomsnittliga tanktiden. Låt π_0, π_1 och π_2 beteckna den stationära fördelningen. Balansekvationerna ger $\mu\pi_1 = 20\pi_0$, $\mu\pi_2 = 10\pi_1$ och $10\pi_1 = \mu\pi_2$. Använder vi att $\pi_0 + \pi_1 + \pi_2 = 1$ så fås att $\pi_0 = 1/(1 + 20\rho + 200\rho^2)$. Att pumpen är ledig hälften av tiden betyder att $\pi_0 = 0.5$, vilket ger $\rho = \frac{1}{20}(\sqrt{3}-1) = 0.037$ timmar.

Uppgift 5

Tillstånden h och k är transienta och tillstånden s och l är rekurrenta (absorberande). Övergångmatrisen kan skrivas som

$$\mathbb{P} = \begin{pmatrix} \mathbb{P}_T & \mathbb{R} \\ 0 & \mathbf{1} \end{pmatrix},$$

där $\mathbb{P}_{\mathbb{T}} = \begin{bmatrix} 3/4 & 3/16 \\ 1/8 & 3/4 \end{bmatrix}$ svarar mot övergångar mellan de transienta tillstånden h och k och $\mathbb{R} = \begin{bmatrix} 1/16 & 0 \\ 0 & 1/8 \end{bmatrix}$ svarar mot övergångar från de transienta till de absorberande tillstånden.

a) Antalet tidssteg som processen tillbringar i de transienta tillstånden innan den till slut hamnar i något av de absorberande tillstånden ges av elementen i matrisen $\mathbb{S} = (\mathbf{1} - \mathbb{P}_T)^{-1}$. Vi får

$$\mathbb{S} = \begin{bmatrix} 1/4 & -3/16 \\ -1/8 & 1/4 \end{bmatrix}^{-1} = \frac{32}{5} \begin{bmatrix} 1 & 3/4 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}.$$

Eftersom kedjan startar i tillstånd h, så ges det genomsnittliga antalet tidssteg som kedjan tillbringar i de transienta tillstånden innan absorption av

$$s_{1,1} + s_{1,2} = 11.2$$

Eftersom varje tidssteg tar en halv minut, så tar det i genomsnitt 5.6 minuter innan katten lägger sig för att sova.

b) Sannolikheten att absorberas i tillstånd l om man startar i tillstånd h ges av

$$(\mathbb{S}\mathbb{R})_{1,2} = \frac{3}{4} \cdot \frac{1}{8} \cdot \frac{32}{5} = 0.6.$$

Uppgift 6

a) Vi har att $\mathbb{E}[A] = \mathbb{E}[\mathbb{E}[A|X]] = \mathbb{E}[\mathbb{E}[XY|X]] = \mathbb{E}[X\mathbb{E}[Y|X]]$. Givet X så är Y likformig på $[0, X^2]$ och alltså $\mathbb{E}[Y|X] = \frac{X^2}{2}$. Det sökta vänteärdet blir $\mathbb{E}[A] = \frac{1}{2}\mathbb{E}[X^3] = \frac{1}{8}$.

Variansen får vi som $\mathrm{Var}(A) = \mathbb{E}[\mathrm{Var}(A|X)] + \mathrm{Var}(\mathbb{E}[A|X]) = \mathbb{E}[X^2\mathrm{Var}(Y|X)] + \mathrm{Var}(X\mathbb{E}[Y|X])$. Här är $\mathrm{Var}(Y|X) = \frac{X^4}{12}$ och $\mathbb{E}[Y|X] = \frac{X^2}{2}$, och alltså $\mathrm{Var}(A) = \frac{1}{12}\mathbb{E}[X^6] + \frac{1}{4}\mathrm{Var}(X^3)$. Använder vi att $\mathrm{Var}(X^3) = \mathbb{E}[X^6] - \mathbb{E}[X^3]^2$ så fås att $\mathrm{Var}(A) = 0.032$.

b) Vi har att $\mathbb{P}(A \geq 0.5) = \int_0^1 \mathbb{P}(XY \geq 0.5|X = x)dx = \int_0^1 \mathbb{P}(Y \geq 1/(2x))dx$, där

$$\mathbb{P}(Y \geq 1/(2x)) = \begin{cases} 0 & \text{om } x^2 \leq 1/(2x); \\ \int_{1/(2x)}^{x^2} \frac{1}{x^2} dt = 1 - \frac{1}{2x^3} & \text{om } x^2 > 1/(2x). \end{cases}$$

Det gäller att $x^2 \leq 1/(2x)$ omm $x \leq 2^{-1/3}$ och alltså fås

$$\mathbb{P}(A \geq 0.5) = \int_{2^{-1/3}}^1 \left(1 - \frac{1}{2x^3}\right) dx = 0.353.$$