

Tentamen i Stokastiska processer och simulering I

22 augusti 2022 kl. 8–13

Examinator: Maria Deijfen.

Tillåtna hjälpmedel: Formelsamling och miniräknare som delas ut med tentan.

Återlämning: Resultat läggs in i Ladok senast måndag 29 augusti.

Varje korrekt löst uppgift ger 10 poäng. För godkänt betyg krävs minst 20 poäng på basdelen. Den svårare delen rättas endast om basdelen är godkänd och betyget sätts då utifrån poängen på den svårare delen: E:0-6, D:7-12, C:13-18, B:19-24, A:25-30. Resonemang skall vara klara och tydliga att följa. Införda beteckningar ska definieras.

Basdel

Uppgift 1

Fem kort är numrerade 1, 2, 3, 4, 5. En spelare drar ett av korten på måfå och får sedan singla ett symmetriskt mynt så många gånger som numret på kortet anger. Varje gång myntet hamnar med krona upp vinner spelaren en krona. Låt V vara den sammanlagda vinsten.

a) Beräkna $\mathbf{E}[V]$.

b) Beräkna $\text{Var}(V)$.

Uppgift 2

En Markovkedja i diskret tid har fyra tillstånd numrerade 1, 2, 3, 4. Övergångsmatrisen (med tillstånden ordnade i nummerordning) ges av

$$\mathbf{P} = \begin{pmatrix} 0 & 1/2 & 1/2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 3/4 & 0 & 1/4 \end{pmatrix}.$$

- a) Dela in kedjans tillstånd i klasser, ange vilka klasser som är rekurrenta respektive transienta, och ange klassernas perioder.
- b) Beräkna sannolikheten att man efter lång tid befinner sig i tillstånd 4 om man startar i tillstånd 2.

Ledning: Reducera kedjan. Mellan vilka tillstånd kan man röra sig om man startar i tillstånd 2?

Uppgift 3

Till en affär kommer kunder enligt en Poissonprocess med intensitet 7 kunder per timme. Varje gång det kommer en kund så är det lika sannolikt att det är en man som en kvinna, oberoende av könet på tidigare kunder.

- a) Vilken fördelning har tiden från att affären öppnar tills den första kunden anländer?
- b) Vilken fördelning har antalet kvinnliga kunder under de första två timmarna?
- c) Vilken fördelning har antalet manliga kunder under den första timmen, givet att det har kommit exakt fyra kunder sammanlagt under den första timmen?
- d) Vi får veta att det har kommit exakt en kund under den första halvtimmen. Vilken fördelning har ankomsttiden för den kunden?
- e) Vilken fördelning har tidpunkten då den tionde kunden anländer?

Svårare del

Uppgift 4

Utanför en frisörsalong passerar potentiella kunder enligt en Poissonprocess med intensiteten 2 per timme. Sannolikheten att en potentiell kund stiger in till frisören är 1 om frisören är ledig, men den minskar linjärt med antalet kunder: När frisören är upptagen (men ingen annan väntar) är sannolikheten 0.75, om en kund dessutom väntar är sannolikheten 0.5, om två väntar är den 0.25 och när tre kunder väntar passerar alla potentiella kunder förbi. Frisören har inte någon medhjälpare, och den tid det tar att klippa en kund är exponentialfördelad med ett väntevärde på 30 minuter.

- a) Bestäm den asymptotiska fördelningen för antalet kunder i salongen.
- b) Hur stor del av de potentiella kunderna går förlorade för frisören i långa loppet?

Uppgift 5

En viss typ av organism får avkomma utan föregående befruktning. Sannolikheten att en individ får minst ett barn till är alltid 0.8, oavsett hur många barn den redan har. Alla individers barnantal är oberoende stokastiska variabler.

a) Beräkna sannolikheten att populationen dör ut om man startar med en individ.

b) Låt D vara händelsen att populationen dör ut och låt X_1 beteckna antalet barn till den initiala individen. Beräkna $\mathbb{P}(X_1 = j|D)$ som funktion av j .

Uppgift 6

De stokastiska variablerna Y_0, Y_1, \dots är oberoende och likafördelade, och antar värden $0, 1, \dots$ med sannolikheter p_0, p_1, \dots . Låt $X_n = \max\{Y_0, \dots, Y_n\}$ för $n \geq 0$. Visa att $\{X_n\}_{n \geq 0}$ är en Markovkedja och bestäm dess övergångssannolikheter.

Lycka till!