STOCKHOLMS UNIVERSITET
MATEMATISKA INSTITUTIONEN
Avd. Matematisk statistik, MD

LÖSNINGAR
22 augusti 2022

Lösningar

22 augusti 2022

Uppgift 1

Låt X vara en stokastisk variabel som anger numret på det dragna kortet. Då gäller att $\mathbb{E}[X] = 3$ och $\mathrm{Var}(X) = 2$.

a) $\mathbb{E}[V] = \mathbb{E}[\mathbb{E}[V|X]] = \mathbb{E}\left[\frac{X}{2}\right] = \frac{\mathbb{E}[X]}{2} = \frac{3}{2}$.

b) $\mathrm{Var}(V) = \mathbb{E}[\mathrm{Var}(V|X)] + \mathrm{Var}(\mathbb{E}[V|X]) = \mathbb{E}\left[\frac{X}{4}\right] + \mathrm{Var}\left(\frac{X}{2}\right) = \frac{1}{4}(\mathbb{E}[X] + \mathrm{Var}(X)) = \frac{5}{4}$.

Uppgift 2

a) Tillstånden kommunicerar med varandra på följande vis:

$$3 \leftrightarrow 1 \rightarrow 2 \leftrightarrow 4 \circlearrowleft$$

Det innebär att kedjans klasser är:
$\{1, 3\}$: transient med period 2
$\{2, 4\}$: rekurrent och aperiodisk

b) Startar man i tillstånd 2 kan man bara röra sig mellan tillstånd 2 och 4 med följande övergångsmatris:

$$\mathbf{P} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 3/4 & 1/4 \end{pmatrix}.$$

Detta är övergångsmatrisen till en markovkedja med en stationär fördelning $\pi = (\pi_2, \pi_4)$ som bestäms genom $\pi\mathbf{P} = \pi$, vilket har lösning $\pi = (3/7, 4/7)$. Den sökta sannolikheten är alltså $4/7$.

Uppgift 3

a) Exp(7) (dvs väntevärdet är 1/7 timme).

b) Po(7)

c) Bin(4,1/2)

d) U(0,1/2) (där tid 0 svarar mot öppningstiden)

e) Gamma(10,7)

Uppgift 4

a) Låt $X(t)$ beteckna antalet kunder i salongen vid tiden t. Processen $X(t)$ är då en födelse-dödsprocess med fem tillstånd $0, 1, 2, 3, 4$. Födelseintensiteterna ges av $\lambda_0 = 2$, $\lambda_1 = 1.5$, $\lambda_2 = 1$ och $\lambda_3 = 0.5$. Dödsintensiteten är $\mu_n = 2$ för $n = 1, 2, 3, 4$. Låt $r_n = \lambda_0\lambda_1 \cdots \lambda_{n-1}/(\mu_1\mu_s \cdots \mu_n)$. Kedjans gränsfördelning $\{p_n\}$ ges av $p_0 = (1 + r_1 + \cdots + r_n)$ och $p_n = r_n p_0$ för $n \geq 1$, vilket ger

$$p_0 = \frac{32}{103} \quad p_2 = \frac{32}{103} \quad p_2 = \frac{24}{103} \quad p_3 = \frac{12}{103} \quad p_4 = \frac{3}{103}.$$

b) Sannolikheten att en kund går förlorad ges av $0.25 \cdot p_1 + 0.5 \cdot p_2 + 0.75 \cdot p_3 + p_4 = 32/103$.

Uppgift 5

a) Organismkolonins tillväxt kan beskrivas av en förgreninsprocess där varje individ ger upphov till j barn med sannolikhet $p_j = 0.8^j 0.2$ ($j = 0, 1, \ldots$). Antalet barn per individ är alltså Geo(0.2)-fördelat med väntevärde $0.8/0.2 = 4 > 1$. Sannolikheten π_0 att populationen dör ut ges då av den minsta positiva roten till ekvationen $\pi_0 = \sum_j \pi_0^j p_j$, där $\{p_i\}$ är avkommefördelningen. Vi har att $\sum_j \pi_0^j p_j = 0.2 \sum_j (0.8 \cdot \pi_0)^j = 0.2/(1 - 0.8 \cdot \pi_0)$, och ekvationen blir alltså $\pi_0 - 0.8 \cdot \pi_0^2 = 0.2$, som har lösningarna $x = 1/4$ och $x = 1$. Den sökta sannolikheten är alltså 1/4.

b) Vi får för $j \geq 1$ att

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(X_1 = j|D) &= \frac{\mathbb{P}(X_1 = j \cap D)}{\mathbb{P}(D)} = \frac{\mathbb{P}(X_1 = j)\mathbb{P}(D|X_1 = j)}{\mathbb{P}(D)} \\ &= \frac{0.2 \cdot 0.8^j \cdot 0.25^j}{0.25} = 0.8 \cdot 0.2^j.\end{aligned}$$

Uppgift 6

Vi har att

$$\begin{array}{lr} P(M_{n+1} = j|M_0 = i_0, \ldots, M_{n-1} = i_{n-1}, M_n = i) & = \\ P(\max\{M_n, Y_{n+1}\} = j|M_0 = i_0, \ldots, M_{n-1} = i_{n-1}, M_n = i) & = \\ P(\max\{M_n, Y_{n+1}\} = j|M_n = i) & = \\ P(\max\{i, Y_{n+1}\} = j). & \end{array}$$

Den andra likheten innebär att kedjan är Markovsk (bara den sista betingningen spelar roll). Övergångssannolikheterna blir

$$P(\max\{i, Y_{n+1}\} = j) = \begin{cases} 0 & \text{om } j < i; \\ p_0 + \ldots + p_i & \text{om } j = i; \\ p_j & \text{om } j > i. \end{cases}$$

Övergångssannolikheterna beror alltså inte på n, och vi har visat att $\{X_n\}$ är en stationär (tidshomogen) Markovkedja.