STOCKHOLMS UNIVERSITET
MATEMATISKA INSTITUTIONEN
Avd. Matematisk statistik

TENTAMEN
13 mars 2023

Tentamen i Stokastiska processer och simulering I

13 mars 2023 kl. 14–19

Examinator: Maria Deijfen, 070-3369790.
Tillåtna hjälpmedel: Formelsamling och miniräknare som delas ut med tentan.
Återlämning: Resultat läggs in i Ladok senast torsdag 31 mars.

Varje korrekt löst uppgift ger 10 poäng. För godkänt betyg krävs minst 20 poäng på basdelen. Den svårare delen rättas endast om basdelen är godkänd och betyget sätts då utifrån poängen på den svårare delen: E:0-6, D:7-12, C:13-18, B:19-24, A:25-30. Resonemang skall vara klara och tydliga att följa. Införda beteckningar ska definieras.

<u>Basdel</u>

Uppgift 1

Antalet skadeanmälningar som inkommer till ett försäkringsbolag under en given månad är Poissonfördelat med väntevärde 150 stycken. Den förväntade kostnaden för att ersätta en skada är 44 tusen kronor med en standardavvikelse på 23 tusen kronor. Kostnaden för de olika skadorna är sinsemellan oberoende, och även oberoende av antalet inrapporterade skador. Bestäm väntevärde och standardavvikelse för försäkringsbolagets totala kostnader för att ersätta skador inrapporterade under månaden.

Uppgift 2

En Markovkedja i diskret tid har sex tillstånd numrerade 1 till och med 6. Övergångsmatrisen (med tillstånden ordnade i nummerordning) ges av

$$\mathbf{P} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0.5 & 0 & 0 & 0 & 0.5 \\ 0.4 & 0 & 0.2 & 0 & 0.4 & 0 \\ 0.2 & 0 & 0.2 & 0 & 0.6 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

a) Dela in kedjans tillstånd i klasser och ange vilka klasser som är rekurrenta respektive transienta.

b) Är några av tillstånden periodiska? Vad är i så fall deras period?

c) Antag att Markovkejdan startar i tillstånd 2. Bestäm sannolikheten att den är i tillstånd j efter lång tid för $j = 1, \ldots, 6$.

Ledning: Reducera kedjan. Mellan vilka tillstånd kan man röra sig om man startar i tillstånd 2?

Uppgift 3

Betrakta en förgreningsprocess där antalet barn per individ beskrivs av en stokastisk variabel $Y \in \{0, 1, 2\}$, med $\mathbb{P}(Y = 0) = 0.7 - r$, $\mathbb{P}(Y = 1) = 0.3$ och $\mathbb{P}(Y = 2) = r$ för något $r \in [0, 0.7]$.

a) För vilka värden på r dör processen ut med sannolikhet 1?

b) Vad är sannolikheten att processen dör ut om $r = 0.45$?

Svårare del

Uppgift 4

Händelser inträffar i tiden enligt en Poissonprocess med intensitet λ.

a) Låt $N(t)$ beteckna antalet händelser som inträffar i intervallet $[0, t]$ och S_n den tidpunkt då den n:te händelsen inträffar. Beräkna $\mathbb{P}(S_1 > a, S_2 < b | N(t) = 2)$ för $0 < a < b < t$.

b) Varje händelse registreras med sannolikheten p oberoende av andra händelser. Låt $N_r(t)$ beteckna antalet händelser som registrerats i intervallet $[0, t]$. Beräkna $\mathbb{P}(N(t) = k | N_r(t) = 2)$.

Uppgift 5

En telefonväxel har två inkommande linjer A och B. Om båda linjer är lediga kopplas ett inkommande samtal in på linje A, om en linje är ledig kopplas samtalet in på denna, om båda linjer är upptagna avvisas samtalet. Uppringningarna till växeln sker enligt en Poissonprocess med intensiteten $\lambda = 20$ samtal per timme och samtalslängderna är oberoende och exponentialfördelade med intensiteten $\mu = 10$ (dvs väntevärde $1/\mu = 1/10$ timme). Man är intresserad av hur stor andel av tiden som linje A respektive linje B är upptagen.

a) Definiera en Markovprocess som kan hjälpa till att besvara frågan och ställ upp intensitetsmatrisen.

b) Besvara frågan, dvs bestäm hur stor andel av tiden som linje A respektive B är upptagen i långa loppet.

Uppgift 6

Låt $\{X_n\}$ vara en Markovkedja i diskret tid. Antag att vi vill bestämma den betingade fördelningen för X_9 givet X_8. Då känner vi alla till att man inte har någon nytta av att få veta utfallet av X_7 också. Mera formellt uttryckt så gäller för alla i, j, k att $\mathbb{P}(X_9 = k | X_7 = i \cap X_8 = j) = \mathbb{P}(X_9 = k | X_8 = j)$. Detta är en omedelbar följd av definitionen av begreppet Markovkedja. Antag nu i stället att vi vill bestämma den betingade fördelningen för X_7, och att vi har möjlighet att få veta utfallet av X_8 eller X_9 eller båda. Ger både X_8 och X_9 oberoende information, eller är en av dem onödig om vi vet den andra? I så fall vilken? Mer precist ställer vi följande fråga: Är den betingade sannolikheten

$$\mathbb{P}(X_7 = i | X_8 = j \cap X_9 = k)$$

alltid lika med

(a) $\mathbb{P}(X_7 = i | X_8 = j)$,

(b) $\mathbb{P}(X_7 = i | X_9 = k)$, eller

(c) varken (a) eller (b).

Bevisa ditt påstående med hjälp av definitionen av Markovkedja.

Lycka till!