STOCKHOLMS UNIVERSITET
MATEMATISKA INSTITUTIONEN — LÖSNINGAR
Avd. Matematisk statistik, MD — 13 mars 2023

Lösningar

13 mars 2023

Uppgift 1

Låt N beteckna antalet inrapporterade skador under månaden och X_i kostnaden för skada i. Följden $\{X_i\}$ är då i.i.d. med väntevärde $\mu = 44000$ och varians $\sigma^2 = 230000^2$ och för N har vi att $\mathbb{E}[N] = \mathrm{Var}(N) = 150$. Den totala kostnaden ges av $T = \sum_{i=1}^{N} X_i$. Väntevärdet blir

$$\mathbb{E}[T] = \mathbb{E}\Big[\mathbb{E}\Big[\sum_{i=1}^{N} X_i | N\Big]\Big] = \mathbb{E}[N\mu] = \mu\mathbb{E}[N] = 6,6 \text{ miljoner kr.}$$

Variansen är

$$\mathrm{Var}(T) = \mathbb{E}[\mathrm{Var}(T|N)] + \mathrm{Var}(\mathbb{E}[T|N]) \overset{ober.}{=} \mathbb{E}[N\sigma^2] + \mathrm{Var}(N\mu) = \sigma^2\mathbb{E}[N] + \mu^2\mathrm{Var}(N),$$

och standardavvikelsen roten ur detta, vilket ger $\mathrm{SD}(T) = 0.6$ miljoner kr.

Uppgift 2

a) Kedjans klasser är $\{2, 6\}$ och $\{1, 3, 4, 5\}$. Båda klasserna är rekurrenta.

b) Alla tillstånd i en klass har samma period och det räcker alltså att titta på ett tillstånd i varje klass. Man ser då tex att tillstånd 2 och 3 har period 1 (eftersom det går att återvända i ett steg). Alla tillstånd är alltså aperiodiska.

c) Om man startar i tillstånd 2 så kan man bara röra sig mellan tillstånd 2 och 6 med följande övergångsmatris:

$$\mathbf{P} = \begin{pmatrix} 0.5 & 0.5 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Detta är övergångsmatrisen till en markovkedja med en stationär fördelning $\pi = (\pi_2, \pi_6)$ som bestäms genom $\pi\mathbf{P} = \pi$, vilket har lösning $\pi = (2/3, 1/3)$. Sannolikheten att man efter lång tid befinner sig till tillstånd j är alltså 0 för $j \in \{1, 3, 4, 5\}$, 2/3 för $j = 2$ och 1/3 för $j = 6$.

Uppgift 3

a) Processen dör säkert ut omm $\mathbb{E}[Y] \leq 1$. Vi har att $\mathbb{E}[Y] = 0.3 + 2r$ och alltså dör processen säkert ut omm $r \leq 0.35$.

b) Den sökta sannolikheten ges av den minsta positiva roten till ekvationen $p_2x^2 + p_1x + p_0 = x$, där $\{p_i\}$ är avkommefördelningen. Ekvationen blir $x^2 - \frac{14}{9}x + \frac{5}{9} = 0$, som har lösningarna $x = 5/9$ och $x = 1$. Den sökta sannolikheten är alltså 5/9.

Uppgift 4

a) Givet att $N(t) = 2$ så är antalet händelser i (a, b) $\mathrm{Bin}\big(2, \frac{b-a}{2}\big)$-fördelat, och vi får att

$$\mathbb{P}(S_1 > a, S_2 < b | N(t) = 2) = \mathbb{P}(\text{två händelser i } (a,b) | N(t) = 2) = \left(\frac{b-a}{2}\right)^2.$$

b) Låt $N_o(t) = N(t) - N_r(t)$ beteckna antalet oregistrerade händelser i $[0, t]$. Då är $N_o(t)$ en Poissonprocess med intensitet $\lambda(1-p)$, som är oberoende av av processen $N_r(t)$. För $k \geq 2$ gäller att

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}(N(t) = k | N_r(t) = 2) &= \mathbb{P}(N_r(t) = 2, N_o(t) = k-2 | N_r(t) = 2) \\
&= \mathbb{P}(N_o(t) = k-2) \\
&= e^{-\lambda(1-p)} \frac{(\lambda(1-p)t)^{k-2}}{(k-2)!}
\end{aligned}$$

Uppgift 5

a) Frågan kan analyseras med hjälp av en Markovkedja i kontinuerlig tid med tillstånden 0: båda linjer är lediga, 1_A: bara linje A är upptagen, 1_B: bara linje B är upptagen, och 2: båda linjer är upptagna. Intensitetsmatrisen (där vi skriver intensiteterna med vilka vi rör oss mellan tillstånden utanför diagonalen, och den sammanlagda intensiteten med vilken vi lämnar tillståndet med omvänt tecken på diagonalen) ges av

$$\mathbf{Q} = \begin{bmatrix} -\lambda & \lambda & 0 & 0 \\ \mu & -(\mu+\lambda) & 0 & \lambda \\ \mu & 0 & -(\lambda+\mu) & \lambda \\ 0 & \mu & \mu & -2\mu \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -20 & 20 & 0 & 0 \\ 10 & -30 & 0 & 20 \\ 10 & 0 & -30 & 20 \\ 0 & 10 & 10 & -20 \end{bmatrix}.$$

b) Eftersom kedjan är ändlig och irreducibel så existerar en gränsfördelning $\pi = (\pi_1, \pi_2, \pi_3)$ som bestäms av $\pi Q = 0$ (balansekvationerna) tillsammans med villkoret att $\pi_1 + \pi_2 + \pi_3 = 1$. Vi får $\pi = \frac{1}{15}(3, 4, 2, 6)$. Den andel av tiden som linje A är upptagen ges av $\pi_{1_A} + \pi_2 = 2/3$ och motsvarande andel för linje B ges av $\pi_{1_B} + \pi_2 = 8/15$.

Uppgift 6

Alternativ (a) är rätt. Låt $A = \{X_7 = i\}$, $B = \{X_8 = j\}$ och $C = \{X_9 = k\}$. Vi ska undersöka $\mathbb{P}(A|B \cap C)$. Definitionen av betingad sannolikhet ger

$$\mathbb{P}(A|B \cap C) = \frac{A \cap B \cap C}{\mathbb{P}(B \cap C)} = \frac{\mathbb{P}(A \cap B)\mathbb{P}(C|A \cap B)}{\mathbb{P}(B)\mathbb{P}(C|B)}.$$

Enligt definitionen av en Markovkedja har vi att $\mathbb{P}(C|A \cap B) = \mathbb{P}(C|B)$, och de sista faktorerna i täljaren och nämnaren kan alltså förkortas bort. Vi får att

$$\mathbb{P}(A|B \cap C) = \frac{\mathbb{P}(A \cap B)}{\mathbb{P}(B)} = \mathbb{P}(A|B),$$

dvs för alla i, j och k gäller att

$$\mathbb{P}(X_7 = i|X_8 = j \cap X_9 = k) = \mathbb{P}(X_7 = i|X_8 = j).$$