STOCKHOLMS UNIVERSITET
MATEMATISKA INSTITUTIONEN
Avd. Matematisk statistik, MD

LÖSNINGAR
13 mars 2023

Lösningar

13 mars 2023

Uppgift 1

Låt N beteckna antalet skrivfel under en given föreläsning, och låt D vara en stokastisk variabel som tar värdet 1 om föreläsaren har en bra dag, värdet 2 om det är en halvbra dag och värdet 3 om det är en dålig dag.

a) Vi har att $\mathbb{E}[N|D=1]=2$, $\mathbb{E}[N|D=2]=5$ och $\mathbb{E}[N|D=3]=12$. Det förväntade antalet skrivfel blir alltså

$$\mathbb{E}[N]=\mathbb{E}[\mathbb{E}[N|D]]=2\cdot 0.3+5\cdot 0.5+12\cdot 0.2=5.5$$

b) Sannolikheten beräknas genom att betinga på variablen D:

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}(N=6) &= \sum_{i=1}^{3}\mathbb{P}(N=6|D=i)P(D=i) \\
&= \frac{2^6e^{-2}}{6!}0.3+\frac{5^6e^{-5}}{6!}0.5+\frac{12^6e^{-12}}{6!}0.2 \\
&= 0.082
\end{aligned}$$

Uppgift 2

Kedjan är irreducibel och den asymptotiska fördelningen $\pi=(\pi_1,\pi_2,\pi_3)$ fås alltså som lösning till ekvationssystemet $\pi=\pi\mathbf{P}$ tillsammans med kravet att $\pi_1+\pi_2+\pi_3=1$:

$$\begin{cases}
0.16\pi_2+0.24\pi_3 = \pi_1 \\
0.25\pi_1+0.01\pi_2+0.47\pi_3 = \pi_2 \\
0.75\pi_1+0.83\pi_2+0.29\pi_3 = \pi_3 \\
\pi_1+\pi_2+\pi_3 = 1.
\end{cases}$$

Man får att $\pi_1 = (0.1745, 0.2956, 0.5299)$, dvs proportionen mellan antalet vokaler och konsonanter är $0.2956/0.5299 = 0.56$.

Uppgift 3

a) $N(3) \sim \mathrm{Po}(3 \cdot 3)=\mathrm{Po}(9)$.

b) $N(2) - N(1)$, som anger antalet händelser i tidsintervallet $(1, 2)$, är Poissonfördelat med parameter 3. Alltså:

$$\mathbb{P}(N(2) - N(1) = 2) = e^{-3} \cdot 3^2/2! = 0.22.$$

c) Eftersom Poissonprocessen har oberoende inkrement får vi att

$$\mathbb{P}(N(2) = 3 \,|\, N(1) = 1) = \mathbb{P}(N(2) - N(1) = 2) = 0.22.$$

d) Tiden T är exponentialfördelad med parameter 3 (dvs väntevärde 1/3).

Uppgift 4

a) Det förväntade antalet barn per individ är $1 \cdot 4/9 + 2 \cdot 4/9 = 4/3 > 1$. Låt π_0 beteckna sannolikheten att en process som startas från en enda individ så småningom dör ut. Då ges π_0 av den minsta positiva roten till ekvationen $p_2 x^2 + p_1 x + p_0 = x$, där $\{p_i\}$ är avkommefördelningen. Ekvationen blir $x^2 - \frac{5}{4}x + \frac{1}{4} = 0$, som har lösningarna $x = 1/4$ och $x = 1$. Vi får alltså $\pi_0 = 1/4$. Processen startas nu från tre individer som initierar varsin subprocess. För att hela processen ska dö ut måste alla tre subprocesser dö ut och eftersom dessa är oberoende så ges den sökta sannolikheten av $\pi_0^3 = 1/4^3 = 1/64 = 0.02$.

b) Vi betingar på antalet individer i den första generationen:

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}(X_2 = 0) &= \sum_{k=0}^{2} \mathbb{P}(X_2 = 0 | X_1 = k)\mathbb{P}(X_1 = k) \\
&= \sum_{k=0}^{2} \mathbb{P}(X_2 = 0 | X_1 = 1)^k p_k \\
&= \sum_{k=0}^{2} \mathbb{P}(X_1 = 0 | X_0 = 1)^k p_k \\
&= \sum_{k=0}^{2} p_0^k p_k \approx 0.166.
\end{aligned}$$

Uppgift 5

a)

$$\mathbf{P} = \begin{bmatrix} 0 & 5/6 & 1/6 & 0 \\ 5/6 & 0 & 0 & 1/6 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

b) Tillstånden $\{1, 2\}$ utgör en transient klass och $\{3\}$ och $\{4\}$ utgör rekurrenta (absorberande) klasser.

c) Övergångmatrisen kan skrivas som

$$\mathbb{P} = \begin{bmatrix} \mathbb{P}_T & \mathbb{R} \\ 0 & \mathbf{1} \end{bmatrix},$$

där $\mathbb{P}_\mathbb{T} = \begin{bmatrix} 0 & 5/6 \\ 5/6 & 0 \end{bmatrix}$ svarar mot övergångar mellan de transienta tillstånden 1 och 2 och $\mathbb{R} = \begin{bmatrix} 1/6 & 0 \\ 0 & 1/6 \end{bmatrix}$ svarar mot övergångar från de transienta till de absorberande tillstånden. Sannolikheten att kedjan absorberas i tillstånd 4 (dvs att Kolmogorov vinner) om man startar i tillstånd 1 (dvs Kolmogorov börjar) ges av $[(\mathbf{1} - \mathbb{P}_T)^{-1}\mathbb{R}]_{1,4}$. Vi får

$$(\mathbf{1} - \mathbb{P}_T)^{-1}\mathbb{R} = \begin{bmatrix} 1 & -5/6 \\ -5/6 & 1 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} 1/6 & 0 \\ 0 & 1/6 \end{bmatrix} = \frac{1}{11} \begin{bmatrix} 6 & 5 \\ 5 & 6 \end{bmatrix},$$

och den sökta sannolikheten är alltså 5/11.

Uppgift 6

a) Om antalet molekyler i kärlet är $n < m$ så är tiden tills en ny molekyl kommer in i kärlet exponentialfördelad med parameter $m - n$, eftersom den ges av minimum av de $m - n$ Exp(1)-fördelade förflyttningstiderna för molekylerna i det andra kärlet. Tiden tills en molekyl å andra sidan lämnar kärlet är exponentialfördelad med parameter n (förutsatt att $n \geq 1$), eftersom den på samma sätt är minimum av de n Exp(1)-fördelade förflyttningstiderna för molekylerna i kärlet. Födelseintensiteterna är alltså $\lambda_n = m - n$ ($n = 0, 1, \ldots, m - 1$) och dödsintensiteterna är $\mu_n = (n = 1, \ldots, m)$.

b) Låt $r_n = \lambda_0 \cdots \lambda_{n-1}/(\mu_1 \cdots \mu_n)$ ($n = 1, \ldots, m$), dvs

$$r_n = \frac{m(m-1)\cdots(m-n+1)}{1 \cdot 2 \cdots n} = \binom{m}{n}.$$

Den asymptotiska fördelningen ges av $p_n = r_n p_0$ $(n \geq 1)$ med $p_0 = 1/(1 + \sum_{i=1}^{m} r_n)$. Eftersom $1 + \sum_{n=1}^{m} r_n = \sum_{n=0}^{m} \binom{m}{n} = 2^m$ (fel i ledningen), så fås för $n = 0, \ldots, m$ att

$$p_n = \binom{m}{n} 0.5^m$$

dvs den asymptotiska fördelningen är $\mathrm{Bin}(m, 0.5)$.