STOCKHOLMS UNIVERSITET
MATEMATISKA INSTITUTIONEN
Avd. Matematisk statistik

TENTAMEN
13 mars 2024

Tentamen i Stokastiska processer och simulering I

13 mars 2024 kl. 8–15

Examinator: Maria Deijfen.
Tillåtna hjälpmedel: Formelsamling och miniräknare som delas ut med tentan.
Återlämning: Resultat läggs in i Ladok senast onsdag 27 mars.

Varje korrekt löst uppgift ger 10 poäng. För godkänt betyg krävs minst 20 poäng på basdelen. Den svårare delen rättas endast om basdelen är godkänd och betyget sätts då utifrån poängen på den svårare delen: E:0-6, D:7-12, C:13-18, B:19-24, A:25-30. Resonemang skall vara klara och tydliga att följa. Införda beteckningar ska definieras.

Basdel

Uppgift 1

Den stokastiska variabeln X är exponentialfördelad med väntevärde 2 och, givet att $X = x$, så är den stokastiska variabeln Y exponentialfördelad med väntevärde $3x$.

a) Bestäm $\mathbf{E}[Y]$.

b) Bestäm $\text{Var}(Y)$.

Tips: Räkneregeln $\text{Var}(X) = \mathbf{E}[X^2] - \mathbf{E}[X]^2$ kan vara till hjälp.

Uppgift 2

En Markovkedja i diskret tid har åtta tillstånd numrerade 1 till och med 8. Övergångsmatrisen (med tillstånden ordnade i nummerordning) är

$$\mathbf{P} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0.5 & 0 & 0.5 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0.6 & 0.4 \\ 0 & 0 & 0.9 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0.1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0.5 & 0.5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0.5 & 0 & 0 & 0.5 \end{pmatrix}.$$

a) Dela in kedjans tillstånd i klasser och ange vilka klasser som är rekurrenta respektive transienta.

b) Är någon eller några av klasserna periodiska? Vad är i så fall deras period?

c) Om $X_0 = 1$, vad är sannolikheten att kedjan någon gång besöker tillstånd 7 (dvs att $X_n = 7$ för något n)?

Uppgift 3

Utanför Kims hus går en väg där bilar passerar norrut enligt en Poissonprocess med intensitet 0.2 bilar/minut och söderut enligt en Poissonprocess med intensitet 0.3 bilar/minut. Den norrgående och den södergående trafiken är oberoende. Kim sätter sig och tittar ut genom förnstret. Vad är sannolikheten att

a) hen får vänta mer än sex minuter innan den första norrgående bilen passerar?

b) hen får vänta mer än två minuter innan den första bilen (oavsett riktning) passerar?

c) mer än en bil (oavsett riktning) passerar under de första två minuterna?

d) den första bil som passerar kör söderut?

Svårare del

Uppgift 4

En Markovkedja i diskret tid har fem tillstånd numrerade 1, 2, 3, 4, 5. Övergångsmatrisen (med tillstånden ordnade i nummerordning) är

$$\mathbf{P} = \begin{pmatrix} 1/2 & 0 & 0 & 1/2 & 0 \\ 0 & 1/2 & 1/4 & 0 & 1/4 \\ 0 & 0 & 2/3 & 0 & 1/3 \\ 1/4 & 0 & 0 & 3/4 & 0 \\ 0 & 1/3 & 1/3 & 0 & 1/3 \end{pmatrix}.$$

a) Motivera varför gränsvärdet $\lim_{n\to\infty} \mathbb{P}(X_n = 1|X_0 = 1)$ existerar och beräkna detta.

b) Antag att kedjan startar i tillstånd 2. Beräkna det förväntade antalet besök i tillstånd 3 före första besöket i tillstånd 5.

Uppgift 5

En radiokanal spelar musik dygnet runt. Händelserna att en lyssnare någonstans därute börjar lyssna på kanalen bildar en Poissonprocess med intensiteten $\lambda = 10$ per sekund. Den tid det tar innan en given lyssnare tröttnar och stänger av är exponentialfördelad med väntevärde fem minuter, och olika lyssnare tröttnar oberoende av varandra. Låt $X(t)$ vara antalet personer som lyssnar på radiokanalen vid tidpunkten t.

a) Finns det någon asymptotisk fördelning för $X(t)$? Beräkna den i så fall.

b) Kommentera rimligheten i modellen.

Uppgift 6

I ett laboratorieprov finns till att börja med k stycken bakterier. För alla bakterier gäller följande: Bakterien dör efter en tidsenhet och lämnar då ett Binomial$(3, p)$-fördelat antal bakterier efter sig. Antalet bakterier som olika bakterier lämnar efter sig är oberoende stokastiska variabler.

a) För vilka värden på k och p är sannolikheten att bakteriekolonin dör ut lika med 1?

b) Antag att $p = 1/2$. Bestäm k så att sannolikheten att bakterierna dör ut är mindre än 10%.

Lycka till!