

Tentamen i Stokastiska processer och simulering I

19 april 2024 kl. 8–13

Examinator: Maria Deijfen.

Tillåtna hjälpmedel: Formelsamling och miniräknare som delas ut med tentan.

Återlämning: Resultat läggs in i Ladok senast onsdag 30 april.

Varje korrekt löst uppgift ger 10 poäng. För godkänt betyg krävs minst 20 poäng på basdelen. Den svårare delen rättas endast om basdelen är godkänd och betyget sätts då utifrån poängen på den svårare delen: E:0-6, D:7-12, C:13-18, B:19-24, A:25-30. Resonemang skall vara klara och tydliga att följa. Införda beteckningar ska definieras.

Basdel

Uppgift 1

Låt $\{N(t)\}_{t \geq 0}$ vara en Poissonprocess med intensiteten λ , och låt T vara en stokastisk variabel som är oberoende av $\{N(t)\}_{t \geq 0}$ och likformigt fördelad på intervallet $(0, 1)$. Bestäm väntevärde och varians för den stokastiska variabeln $N(T)$.

Uppgift 2

En Markovkedja i diskret tid har sex tillstånd numrerade 1 till och med 6. Övergångsmatrisen (med tillstånden ordnade i nummerordning) är

$$\mathbf{P} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1/2 & 0 & 0 & 0 & 1/2 \\ 0 & 0 & 0 & 2/3 & 0 & 1/3 \\ 0 & 1/4 & 1/4 & 1/2 & 0 & 0 \\ 1/4 & 3/4 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1/3 & 0 & 0 & 0 & 2/3 \end{pmatrix}.$$

- a) Dela in kedjans tillstånd i klasser och ange för varje klass vilken period den har samt om den är rekurrent eller transient.
- b) Bestäm de två sannolikheterna $P(X_{10} = 5 | X_8 = 4, X_4 = 3)$ och $P(X_{10} = 4 | X_8 = 4, X_4 = 3)$.

Uppgift 3

Patienter anländer till en akutmottagning enligt en Poissonprocess med intensitet 4 patienter per timme. Mottagningen öppnar kl 7.00 på morgonen.

- a) Vad är sannolikheten att ingen patient anländer innan kl 7.30?
- b) Om ingen patient anländer innan kl 7.30, vad är sannolikheten att det dröjer till efter kl 8.00 innan den första patienten anländer?
- c) Om exakt en patient anländer innan kl 7.30, vad är sannolikheten att denne anlände innan kl 7.20?

Svårare del

Uppgift 4

En person har två paraplyer som hon använder när hon går från hemmet till arbetet på morgonen och när hon går hem från arbetet på eftermiddagen. Om det regnar när hon ska gå och det finns minst ett paraply där hon befinner sig tar hon med sig ett paraply och lämnar det sedan på det andra stället. Om det inte regnar tar hon inte med sig något paraply. Antag att det vid varje tillfälle regnar med sannolikheten p , oberoende av vad som hänt vid tidigare tillfällen.

- a) Visa att antalet paraplyer som finns på det ställe hon ska lämna bildar en Markovkedja med tre tillstånd, och skriv upp övergångsmatrisen.
- b) Motivera att Markovkedjan har en gränsfördelning och bestäm denna.
- c) Bestäm andelen gånger hon kommer att bli blöt i långa loppet. Detta inträffar förstås de gånger det regnar när hon ska gå och båda paraplyerna är på det andra stället.

Uppgift 5

Den adliga ätten Krusenbane instiftas år 1312 av Vincent Krusenbane. Den adliga titeln går i arv till alla söner i kommande generationer. En manlig medlem av ätten får antingen 0 söner (sannolikheten för detta är $1/9$), 1

son (sannolikhet $4/9$) eller 2 söner (sannolikhet $4/9$). Antalet söner till olika män är oberoende.

a) Vad är sannolikheten att ätten dör ut?

b) Om vi får veta att ätten dog ut, vad är sannolikheten att den var utdöd redan i tredje generationen, dvs att Vincent Krusenbane inte fick några sonsöner?

Uppgift 6

Till en taxistation anländer presumtiva kunder enligt en Poissonprocess med intensitet 10 personer/timme. Taxibilar anländer till stationen enligt en Poissonprocess med intensitet 8 bilar/timme. De båda processerna är oberoende av varandra. Om det uppstår en kö av kunder så gäller att en kund som anländer ansluter sig till kön endast om den består av högst en person (står redan två eller fler personer och väntar tar hon bussen). Det finns plats för två väntande taxibilar, så en eventuell kö av taxibilar kan också bestå av högst två bilar. Stationen kan antas ha varit igång så länge att den har nått sitt jämviktsläge. Hur stor andel av tiden kommer det att vara (i) kö av kunder, (ii) kö av bilar, (iii) ingen kö?

Lycka till!