STOCKHOLMS UNIVERSITET
MATEMATISKA INSTITUTIONEN
Avd. Matematisk statistik, MD

LÖSNINGAR
19 april 2024

Lösningar

19 april 2024

Uppgift 1

Vi har att $N(t) \sim \mathrm{Po}(\lambda t)$. Väntevärdet för $N(T)$ blir

$$\mathbb{E}[N(T)] = \mathbb{E}[\mathbb{E}[N(T)|T]] = \mathbb{E}[\lambda T] = \lambda \mathbb{E}[T] = \lambda/2$$

och variansen ges av

$$\begin{aligned} \mathrm{Var}(N(T)) &= \mathbb{E}[\mathrm{Var}(N(T)|T)] + \mathrm{Var}(\mathbb{E}[N(T)|T]) = \mathbb{E}[\lambda T] + \mathrm{Var}(\lambda T) \\ &= \lambda \mathbb{E}[T] + \lambda^2 \mathrm{Var}(T) = \lambda/2 + \lambda^2/12. \end{aligned}$$

Uppgift 2

a) Kedjans klasser är $\{1,5\}$ (transient, period 2), $\{2,6\}$ (rekurrent, aperiodisk), $\{3,4\}$ (transient, aperiodisk).

b) Det går inte att ta sig från tillstånd 4 till tillstånd 5, och därmed är den första sannolikheten 0. För den andra sannolikheten gäller att $P(X_{10} = 4|X_8 = 4, X_4 = 3) = P(X_{10} = 4|X_8 = 4) = P(X_2 = 4|X_0 = 4)$. Vi söker alltså sannolikheten att vi, om vi börjar i tillstånd 4, är tillbaka där efter två steg. Detta kan ske antingen genom att vi tar ett steg till tillstånd 3 och sen tillbaka, vilket sker med sannolikhet $\frac{1}{4} \cdot \frac{2}{3}$, eller genom att vi hela tiden står kvar i tillstånd 4, vilket sker med sannolikhet $\left(\frac{1}{2}\right)^2$. Den sökta sannolikheten är alltså $\frac{1}{4} \cdot \frac{2}{3} + \left(\frac{1}{2}\right)^2 = \frac{5}{12}$.

Uppgift 3

a) Tiden T tills den första patienten anländer är Exp(4) =-fördelad. Den sökta sannolikheten är alltså $\mathbb{P}(T > 0.5) = e^{-0.5\cdot 4} = e^{-2} \approx 0.135$.

b) Vi söker $\mathbb{P}(T > 1 | T > 0.5) = P(T > 1 - 0.5) \approx 0.135$.

c) Eftersom en Poissonprocess har oberoende stationära inkrement får vi att

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(N(1/3) = 1 | N(1/2) = 1) &= \frac{\mathbb{P}(N(1/3) = 1) \cdot \mathbb{P}(N(1/2) - N(1/3) = 0)}{\mathbb{P}(N(1/2) = 1)} \\ &= \frac{\frac{4}{3}e^{-4/3} \cdot e^{-4/6}}{\frac{4}{2}e^{-4/2}} = \frac{2}{3}.\end{aligned}$$

Uppgift 4

a) Låt tillstånd i betyda att det finns i stycken paraplyer på platsen som personen ska lämna ($i = 1, 2, 3$). Då fås en Markovkedja med övergångsmatris

$$\mathbb{P} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1-p & p \\ 1-p & p & 0 \end{bmatrix}.$$

b) Kedjan är ändlig, irreducibel och aperidodisk. En gränsfördelning existerar därför och fås som lösning till $\pi = \pi\mathbb{P}$. Vi får $\pi = \left(\frac{1-p}{3-p}, \frac{1}{3-p}, \frac{1}{3-p}\right)$.

c) Sannolikheten att hon blir blöt ges av $p \cdot \pi_0 = \frac{p(1-p)}{3-p}$.

Uppgift 5

a) Processen X_n som anger antalet män i den n:te generationen utgör en förgreningsprocess där avkomman Y är fördelad enligt $p_0 = P(Y = 0) = 1/9$, $p_1 = P(Y = 1) = 4/9$, $p_2 = P(Y = 2) = 4/9$. Eftersom $\mathbb{E}[Y] = 4/3 > 1$ så är utdöendesannolikheten strikt mindre än 1, och ges av den minsta positiva roten till ekvationen $\pi = 1/9 + (4/9)\pi + (4/9)\pi^2$, som är 1/4.

b) Låt A beteckna händelsen att processen dör ut och låt B beteckna händelsen att Vincent inte får några sonsöner. Det som söks är $P(B|A)$. Eftersom B är en delhändelse till A och eftersom $P(A) = 1/4$ enligt auppgiften så får vi

$$P(B|A) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)} = \frac{P(B)}{P(A)} = 4P(B).$$

Antalet söner till Vincent ges av X_1. Vi får

$$P(B) = \sum_{k=0}^{2} P(B|X_1 = k)P(X_1 = k) = 1 \cdot \frac{1}{9} + \frac{1}{9} \cdot \frac{4}{9} + \left(\frac{1}{9}\right)^2 \cdot \frac{4}{9} \approx 0.166$$

och alltså $P(B|A) \approx 0.664$.

Uppgift 6

Processen utgör en födelse-dödsprocess med tillstånden 0 (två personer i kö), 1 (en person i kö), 2 (ingen kö), 3 (en bil i kö), 4 (två bilar i kö). Födelseintensiteterna är $\lambda_n \equiv 8$ $(n = 0, \dots, 3)$ och dödsintensiteterna $\mu_n \equiv 10$ $(n = 1, \dots, 4)$. Med $\rho_n = \lambda_0 \cdots \lambda_{n-1}/(\mu_1 \cdots \mu_n)$ så ges den asymptotiska fördelningen för processen av $p_0 = (1 + \sum_{n=1}^{4} \rho_n)^{-1}$ och $p_n = \rho_n p_0$. Vi har $\rho_n = (8/10)^n$ $(n = 1, \dots, 4)$ och får då $p_0 = 0.2975$, $p_1 = 0.2380$, $p_2 = 0.1904$, $p_3 = 0.1523$, $p_4 = 0.1218$. Andelen av tiden som det är kö av kunder ges av $p_0 + p_1 = 0.54$, andelen av tiden som det är kö av bilar ges av $p_3 + p_4 = 0.27$ och andelen av tiden som det inte är någon kö ges av $p_2 = 0.19$.