STOCKHOLMS UNIVERSITET
MATEMATISKA INSTITUTIONEN
Avd. Matematisk statistik

TENTAMEN
11 juni 2024

Tentamen i Stokastiska processer och simulering I

11 juni 2024

Examinator: Maria Deijfen.
Tillåtna hjälpmedel: Formelsamling och miniräknare som delas ut med tentan.
Återlämning: Resultat läggs in i Ladok senast torsdag 20 juni.

Varje korrekt löst uppgift ger 10 poäng. För godkänt betyg krävs minst 20 poäng på basdelen. Den svårare delen rättas endast om basdelen är godkänd och betyget sätts då utifrån poängen på den svårare delen: E:0-6, D:7-12, C:13-18, B:19-24, A:25-30. Resonemang skall vara klara och tydliga att följa. Införda beteckningar ska definieras.

Basdel

Uppgift 1

Den stokastiska variabeln Y är exponentialfördelad med väntevärde $1/\lambda$. Givet att $Y = y$ så gäller att X är Poissonfördelad med parameter y.

a) Beräkna $\mathbf{E}[X]$.

b) Beräkna $\mathbf{P}(X = 1)$.

Uppgift 2

En Markovkedja $\{X_n\}_{n\geq 0}$ i diskret tid har sju tillstånd numrerade 0,1,2,3,4,5,6. Övergångsmatrisen (med tillstånden ordnade i nummerordning) är

$$\mathbf{P} = \begin{pmatrix} 0.6 & 0 & 0 & 0 & 0.4 & 0 & 0 \\ 0.2 & 0.5 & 0 & 0 & 0.3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0.4 & 0 & 0 & 0.6 \\ 0 & 0 & 0.9 & 0 & 0 & 0.1 & 0 \\ 0.4 & 0 & 0 & 0 & 0.6 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0.2 & 0 & 0 & 0.8 \\ 0 & 0 & 0.5 & 0 & 0 & 0.5 & 0 \end{pmatrix}.$$

a) Dela in kedjans tillstånd i klasser.

b) Avgör om följande gränsvärden existerar (motivering krävs) och bestäm dem i sådana fall:

(i) $\lim_{n\to\infty} P(X_n = 1|X_0 = 1)$

(ii) $\lim_{n\to\infty} P(X_n = 2|X_0 = 6)$

(iii) $\lim_{n\to\infty} P(X_n = 0|X_0 = 0)$

Uppgift 3

En liftare ställer sig vid en enkelriktad väg där bilar passerar enligt en Poissonprocess med intensitet 0.5 bilar/minut. Sannolikheten för att en passerande bil stannar för att ta upp en liftare är 0.2 oberoende av allting annat.

a) Vilken fördelning har tiden tills den första bilen passerar?

b) Vilken fördelning har antalet bilar som passerar under de första 10 minutrarna?

c) Vilken fördelning har tiden tills någon bil stannar och tar upp liftaren?

d) Om liftaren har väntat 10 minuter utan att någon bil stannat, vad är sannolikheten att hen får vänta i ytterligare 10 minuter?

Svårare del

Uppgift 4

På ett spelbräde finns tre rutor numrerade 1-3. En spelare startar i ruta 1 och kastar en tärning upprepade gånger. De olika utfallen leder till följande resultat:

> Om man får en etta eller en tvåa flyttar man fram en ruta.
>
> Om man får en trea eller en fyra så flyttar man en ruta framåt om man står i ruta ett, annars en ruta bakåt.
>
> Om man får en femma eller en sexa så avbryts spelet och man har förlorat.

Målet för spelaren är att nå ruta 3 - då vinner hon spelet.

a) Vad är det förväntade antalet steg tills spelet avgörs?

b) Vad är sannolikheten att spelaren vinner spelet?

Uppgift 5

Potentiella kunder anläder till en glasskiosk enligt en Poissonprocess med intensitet λ. Kiosken har en betjäningslucka där betjäningstiderna är exponentialfördelade med väntevärde $1/\mu$ oberoende av allt annat. Om en kund anländer och finner n personer före sig vid kiosken (inklusive den som betjänas) så ställer han sig i kön med sannolikhet $1/(1+n)$. Visa att det för alla värden på λ och μ existerar en gränsfördelning för antalet personer vid kiosken och bestäm denna fördelning.

Uppgift 6

Låt X_n beteckna antalet individer i den $n$te generationen av en förgreningsprocess i diskret tid. Antag att $X_0 = 1$ och låt μ beteckna väntevärdet för antalet barn till en individ.

a) Visa att $\mathbf{E}[X_n] = \mu^n$ för alla $n \geq 0$.

b) Visa att, om $\mu < 1$ så gäller att $\lim_{n\to\infty} \mathbf{P}(X_n \geq 1) = 0$.

Lycka till!