STOCKHOLMS UNIVERSITET
MATEMATISKA INSTITUTIONEN
Avd. Matematisk statistik, MD

LÖSNINGAR
11 juni 2024

Lösningar

11 juni 2024

Uppgift 1

a) Eftersom Poissonfördelningens väntevärde är lika med parameterna så har vi att $\mathbb{E}[X|Y=y]=y$, dvs $\mathbb{E}[X|Y]=Y$, och får alltså

$$\mathbb{E}[X]=\mathbb{E}[\mathbb{E}[X|Y]]=\mathbb{E}[Y]=1/\lambda.$$

b) Vi får

$$\mathbb{P}(X=1)=\int_{\infty}^{\infty}\mathbb{P}(X=1|Y=y)f_Y(y)dy=\int_0^{\infty}ye^{-y}\lambda e^{-\lambda y}dy=\frac{\lambda}{(\lambda+1)^2}.$$

Uppgift 2

a) Kedjans klasser är $\{1\}$, $\{0,4\}$, $\{2,3,5,6\}$.

b) Tillstånd 1 är transient och besöks därför bara ett ändligt antal gånger. Alltså gäller att $\lim \mathbb{P}(X_n=1|X_0=1)=0$. Gränsvärdet $\lim \mathbb{P}(X_n=2|X_0=6)$ existerar inte, eftersom klassen $\{2,3,5,6\}$ är periodisk med period 2. Startar man i tillstånd 0 så utgör klassen $\{0,4\}$ en separat irreducibel kedja där man rör sig enligt matrisen $\mathbb{P}=\begin{pmatrix}0.6 & 0.4\\ 0.4 & 0.6\end{pmatrix}$. Gränsfördelningen $\pi=(\pi_0,\pi_4)$ bestäms av $\pi=\pi\mathbb{P}$ och $\pi_0+\pi_4=1$, vilket ger $\pi_0=0.5$.

Uppgift 3

a) Tiden T tills den första bilen passerar är Exp(0.5)-fördelad.

b) Antalet bilar under de första 10 min är Po($10 \cdot 0.5$)=Po(5)-fördelat.

c) De bilar som stannar beskrivs av en uttunning av den underliggande Poissonprocessen och utgör alltså en Poissonprocess med intensitet $0.5 \cdot 0.2 = 0.1$ bilar per minut. Tiden tills någon bil stannar är alltså Exp(0.1)-fördelad.

d) Låt T vara tiden tills någon bil stannar. Eftersom exponentialfördelningen är minneslös så gäller att $\mathbb{P}(T > 20|T > 10) = \mathbb{P}(T > 10) = e^{-10 \cdot 0.1} = e^{-1}$.

Uppgift 4

Spelet kan representeras av en Markovkedja i diskret tid med fyra tillstånd 0,1,2,3, där tillstånd 0 representerar förlust, tillstånd 3 vinst, och tillstånden 1-2 de mellanliggande rutorna. Tillstånden 0 och 3 är absorberande och tillstånden 1 och 2 är transienta, och övergångsmatrisen (med tillstånden ordnade i nummerordning) ges av

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1/3 & 0 & 2/3 & 0 \\ 1/3 & 1/3 & 0 & 1/3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Ordnar vi om tillstånden så att de transienta kommer första kan matrisen skrivas som

$$\begin{pmatrix} \mathbb{P}_T & \mathbb{R} \\ 0 & \mathbf{1} \end{pmatrix},$$

där $\mathbb{P}_{\mathbb{T}} = \begin{pmatrix} 0 & 2/3 \\ 1/3 & 0 \end{pmatrix}$ svarar mot övergångar mellan de transienta tillstånden 1 och 2 och $\mathbb{R} = \begin{pmatrix} 0 & 1/3 \\ 1/3 & 1/3 \end{pmatrix}$ svarar mot övergångar från de transienta till de absorberande tillstånden.

a) Det förväntade antalet besök i de transienta tillstånden ges av matrisen

$$\mathbb{S} = (\mathbf{1} - \mathbb{P}_T)^{-1} = \frac{9}{7} \begin{pmatrix} 1 & 2/3 \\ 1/3 & 1 \end{pmatrix}.$$

Den första raden svarar mot starttillstånd 1 och det sammanlagda antalet besök i de transienta tillstånden innan absorption i något av de absorberande tillstånden ges då av $\frac{9}{7}\left(1 + \frac{2}{3}\right) = \frac{15}{7}$. Detta blir då också tiden tills spelet avgörs.

b) Sannolikheten att kedjan absorberas i tillstånd 3 (dvs att spelaren vinner) om man startar i tillstånd 1 ges av $[\mathbb{SR}]_{1,3}$. Vi får

$$\mathbb{SR} = \begin{pmatrix} 5/7 & 2/7 \\ 4/7 & 3/7 \end{pmatrix}.$$

och den sökta sannolikheten är alltså 2/7.

Uppgift 5

Låt $X(t)$ beteckna antalet peroner i systemet vid tid t. Då är $X(t)$ en födelse-dödsprocess med födelseintensiteter $\lambda_n = \lambda/(n+1)$ $(n = 0, 1, 2, \ldots)$ och dödsintensiteter $\mu_n = \mu$ $(n = 1, 2, 3, \ldots)$. Låt $r_n = (\lambda_0 \cdots \lambda_{n-1})/(\mu_1 \cdots \mu_n)$ för $n \geq 1$ och sätt $r_0 = 1$. En asymptotisk fördelning existerar om $\sum_{n=0}^{\infty} r_n < \infty$. Detta är uppfyllt för alla värden på λ och μ, eftersom $r_n = \lambda^n/(n!\mu^n)$. Den asymptotiska fördelningen ges av

$$p_n = \frac{r_n}{\sum_{k=0}^{\infty} r_k} = \frac{(\lambda/\mu)^n}{n!} e^{-\lambda/\mu} \text{ för } n = 0, 1, \ldots,$$

dvs en Poissonfördelning med parameter λ/μ.

Uppgift 6

a) Låt $Y_{n,i}$ beteckna antalet barn till individ i i generation n. Vi vet att $\mathbb{E}[Y_{n,i}] = \mu$ för alla i och n, och har dessutom att $X_n = \sum_{i=1}^{X_{n-1}} Y_{n-1,i}$, eftersom generation n består av barnen till individerna i generation $n-1$. Vi kan nu visa påstådet med hjälp av induktion. För det första gäller att $X_0 = 1 = \mu^0$ och basen är klar. Antag nu att $\mathbb{E}[X_{n-1}] = \mu^{n-1}$. Genom att betinga på X_{n-1} får vi att

$$\begin{aligned} \mathbb{E}[X_n] &= \mathbb{E}\left[\sum_{i=1}^{X_{n-1}} Y_{n-1,i}\right] = \mathbb{E}\left[\mathbb{E}\left[\sum_{i=1}^{X_{n-1}} Y_{n-1,i} \middle| X_{n-1}\right]\right] \\ &= \mathbb{E}[X_{n-1} \cdot \mu] = \mu \mathbb{E}[X_{n-1}] = \mu \cdot \mu^{n-1} = \mu^n. \end{aligned}$$

b) Vi noterar att $\mathbb{P}(X_n \geq 1) = \sum_{k=1}^{\infty} \mathbb{P}(X_n = k) \leq \sum_{k=1}^{\infty} k\mathbb{P}(X_n = k) = \mathbb{E}[X_n]$. Det följer att

$$\lim_{n\to\infty} \mathbb{P}(X_n \geq 1) \leq \lim_{n\to\infty} \mathbb{E}[X_n] = \lim_{n\to\infty} \mu^n = 0 \text{ om } \mu < 1.$$