

Tentamen i Stokastiska processer och simulering I

15 mars 2025

Examinator: Maria Deijfen.

Tillåtna hjälpmedel: Formelsamling och miniräknare som delas ut med tentan.

Återlämning: Resultat läggs in i Ladok senast fredag 28 mars.

Varje korrekt löst uppgift ger 10 poäng. För godkänt betyg krävs minst 20 poäng på basdelen. Den svårare delen rättas endast om basdelen är godkänd och betyget sätts då utifrån poängen på den svårare delen: E:0-6, D:7-12, C:13-18, B:19-24, A:25-30. Resonemang skall vara klara och tydliga att följa. Införda beteckningar ska definieras.

Basdel

Uppgift 1

Ett symmetriskt mynt kastas tills man får klave. Låt X beteckna antalet myntkast *före* första klaven (X kan alltså anta värdena $0, 1, 2, \dots$). Sen kastas en tärning X gånger. Låt Y beteckna antalet sexor.

a) Beräkna $\mathbf{E}[Y]$.

b) Beräkna $\text{Var}(Y)$.

Uppgift 2

I ett visst land i den tempererade zonen förekommer endast två vädertyper: regnigt och soligt. Vädret under en följd av dagar varierar som en Markovkedja, där sannolikheten att en dag ska vara solig är 0.8 om föregående dag var solig och 0.6 om föregående dag var regnig.

a) Bestäm övergångsmatris och tvåstegsövergångsmatris för Markovkedjan.

b) Om årets första dag är solig med sannolikhet 0.5, hur stor är då sannolikheten att det två dagar senare är soligt?

Uppgift 3

Betrakta en förgreningsprocess där individer förökar sig med hjälp av delning. Delningen lyckas med sannolikhet p och leder då till att individen lämnar två nya individer efter sig. Delningen misslyckas med sannolikhet $1 - p$ och individen dör då utan att lämna några nya individer efter sig.

- a) För vilka värden på p dör processen säkert ut?
- b) Vad är sannolikheten att processen dör ut om $p = 0.75$?

Svårare del

Uppgift 4

Vid matematiska fakulteten vid universitetet i Småstad händer det då och då att en studerande avlägger doktorsexamen (disputerar). Dessa händelser utgör en Poissonprocess med intensiteten två per år. Vid universitetet finns också en juridisk och en teologisk fakultet. Även här avläggs doktorsexamen enligt Poissonprocesser med intensiteterna två per år. De tre Poissonprocesserna är oberoende.

- a) Om vi får veta att exakt sex personer disputerade förra året, vad är sannolikheten att minst en av dem är matematiker?
- b) Hur lång tid kan vi förvänta oss att det tar innan minst en person från varje fakultet har disputerat?

Uppgift 5

I ett hus finns åtta rum, numrerade 1 till 8. Rummen är ordnade i ring och varje rum har en dörr till det angränsande rummet åt höger och åt vänster. Vid tiden $n = 0$ befinner sig Anja i rum 1 och Anton i rum 5. Vid varje heltalstidpunkt flyttar sig Anja sedan på måfå ett rum åt höger eller vänster, och detsamma gör Anton. Alla förflyttningar är oberoende av varandra. Låt T beteckna tidpunkten då Anja och Anton för första gången befinner sig i samma rum. Beräkna väntevärdet för T .

Ledning: Analysera hur antalet rum mellan Anja och Anton utvecklar sig.

Uppgift 6

Till en liten parkeringsplats med två bilplatser och en motorcykelplats anländer bilar enligt en Poissonprocess med intensitet 3 bilar/timme och motorcyklar enligt en Poissonprocess med intensitet 0.5 motorcyklar/timme. Ett

anländande fordon parkerar om det finns plats av rätt sort och står sedan kvar en tid som är exponentialfördelad med väntevärde 15 minuter. Poissonprocesserna och parkeringstiderna är alla oberoende av varandra.

- a) Bestäm fördelningen för antalet upptagna bilplatser efter lång tid.
- b) Bestäm sannolikheten att motorcykelplatsen är upptagen efter lång tid.
- c) Bestäm fördelningen för det totala antalet upptagna parkeringsplatser (oavsett typ) efter lång tid.

Lycka till!