

Lösningar

15 mars 2025

Uppgift 1

Antalet tärningskast X är $\text{Ge}(1/2)$ -fördelat, med $\mathbb{E}[X] = 1$ och $\text{Var}(X) = 2$, och för antalet sexor Y gäller att $Y|X = x \sim \text{Bin}(x, 1/6)$.

a)

$$\mathbb{E}[Y] = \mathbb{E}[\mathbb{E}[Y|X]] = \mathbb{E}[X/6] = 1/6.$$

b)

$$\text{Var}(Y) = \mathbb{E}[\text{Var}(Y|X)] + \text{Var}(\mathbb{E}[Y|X]) = \mathbb{E}\left[X \cdot \frac{1}{6} \left(1 - \frac{1}{6}\right)\right] + \text{Var}(X/6) = 7/36.$$

Uppgift 2

Låt tillstånd 1 svar mot 'regnigt' och tillstånd 2 mot 'soligt'.

a) Övergångsmatrisen är

$$\mathbf{P} = \begin{pmatrix} 0.4 & 0.6 \\ 0.2 & 0.8 \end{pmatrix}$$

och övergångsmatrisen i två steg ges

$$\mathbf{P}^2 = \begin{pmatrix} 0.28 & 0.72 \\ 0.24 & 0.76 \end{pmatrix}.$$

b) Om årets första dag är solig är sannolikheten att det två dagar senare är soligt 0.76, om den första dagen är regnig är sannolikheten att det två dagar senare är soligt 0.72. Den sökta sannolikheten är alltså $0.5 \cdot 0.76 + 0.5 \cdot 0.72 = 0.74$.

Uppgift 3

Låt X beteckna antalet barn som en individ lämnar efter sig. Då gäller att $\mathbb{P}(X = 2) = 1 - \mathbb{P}(X = 0) = p$ och alltså $\mathbb{E}[X] = 2p$.

a) Processen dör säkert ut om $\mathbb{E}[X] \leq 1$, dvs om $p \leq 1/2$.

b) Sannolikheten att processen dör ut ges av den minsta lösningen till ekvationen $0.25 + 0.75 \cdot x^2 = x$, dvs $1/3$.

Uppgift 4

a) Eftersom de tre Poissonprocesserna är oberoende så är varje doktorand som disputerar matematiker med sannolikheten $1/3$, oberoende av de övriga. Sannolikheten att ingen av de sex doktoranderna är matematiker är alltså $(2/3)^6$ och sannolikheten att minst en är matematiker blir då $1 - (2/3)^6 \approx 0.91$.

b) Tiden tills en person från varje fakultet har disputerat är en summa av tre delar: Först tiden X tills den första personen disputerar, sen tiden Y därefter tills en person från någon annan fakultet disputerar och slutligen tiden Z därefter tills en person från den tredje fakulteten disputerar. Hela disputationensflödet (oavsett fakultet) är en Poissonprocess med intensitet 6 per år, och vi har alltså att $X \sim \text{Exp}(6)$. Disputationer vid de två återstående fakulteterna efter tid X utgör sen, pga minneslösheten, en Poissonprocess med intensitet 4 per år, dvs $Y \sim \text{Exp}(4)$. Till sist har vi, på samma sätt, att $Z \sim \text{Exp}(2)$. Den förväntade tiden tills minst en person från varje fakultet har disputerat blir alltså $\mathbb{E}[X] + \mathbb{E}[Y] + \mathbb{E}[Z] = 1/6 + 1/4 + 1/2 = 11/12$, dvs 11 månader.

Uppgift 5

Låt X_n beteckna antalet rum mellan Anja och Anton efter n steg (men kan röra sig åt två håll i ringen, och vi låter X_n beteckna det minsta antalet rum mellan Anja och Anton). Vi har då att $X_0 = 3$ och att X_n därefter kan anta värdena 3,1,0. Man rör sig mellan dessa tillstånd enligt en Markokedja i diskret tid med övergångsmatris (där tillstånden är ordnade som ovan)

$$\begin{pmatrix} 1/2 & 1/2 & 0 \\ 1/4 & 1/2 & 1/4 \\ 0 & 1/2 & 1/2 \end{pmatrix}.$$

Vi gör tillstånd 0 absorberande (eftersom vi är intresserade av tiden tills vi kommer dit) och får då matrisen

$$\mathbf{P} = \begin{pmatrix} 1/2 & 1/2 & 0 \\ 1/4 & 1/2 & 1/4 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbb{P}_T & \mathbb{R} \\ 0 & 1 \end{pmatrix},$$

där $\mathbb{P}_T = \begin{pmatrix} 1/2 & 1/2 \\ 1/4 & 1/2 \end{pmatrix}$ svarar mot övergångar mellan de transienta tillstånden 3 och 1 (och $\mathbb{R}$ svarar mot övergångar från de transienta tillstånden till det absorberande). Det förväntade antalet besök i de transienta tillstånden ges av matrisen

$$\mathbb{S} = (\mathbf{1} - \mathbb{P}_T)^{-1} = \begin{pmatrix} 4 & 4 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}.$$

Den första raden svarar mot starttillstånd 3 och det sammanlagda antalet besök i de transienta tillstånden innan absorption i 0 ges av $4 + 4 = 8$.

Uppgift 6

a) Är vi bara intresserade av bilarna kan vi ignorera motorcyklarna. Antalet upptagna bilplatser utgör en Markovprocess i kontinuerlig tid med övergångar $0 \rightarrow 1$ och $1 \rightarrow 2$ med intensitet 3, övergång $2 \rightarrow 1$ med intensitet 8 och $1 \rightarrow 0$ med intensitet 4 (dvs en födelse-dödsprocess). Låt $\{p_0, p_1, p_2\}$ beteckna den asymptotiska fördelningen. Balansekvationerna blir $-3p_0 + 4p_1 = 0$ och $3p_0 - 7p_1 + 8p_2 = 0$ vilket, med hjälp av bivillkoret $p_0 + p_1 + p_2 = 1$ ger $p_0 = 32/65$, $p_1 = 24/65$ och $p_2 = 9/65$.

b) Är vi bara intresserade av motorcyklarna kan vi ignorera bilarna. Motorcykelplatsens status skiftar mellan 0 (ledig) och 1 (upptagen) enligt en Markovprocess i kontinuerlig tid med övergång $0 \rightarrow 1$ med intensitet 0.5 och $1 \rightarrow 0$ med intensitet 4. Om $\{p_0, p_1\}$ betecknar den asymptotiska fördelningen, så blir balansekvationen $-p_0 + 8p_1 = 0$ och, med hjälp av bivillkoret $p_0 + p_1 = 1$, fås att $p_0 = 8/9$ och $p_1 = 1/9$.

c) Låt X beteckna sammanlagt antal upptagna parkeringsplatser efter lång tid. Vi har att $X = 0$ om ingen bilplats är upptagen och motorcykelplatsen är ledig. Eftersom bilar och motorcyklar kommer och går oberoende av varandra fås att $\mathbb{P}(X = 0) = \frac{32}{65} \cdot \frac{8}{9} \approx 0.44$. Vi har att $X = 1$ om antingen en bilplats är upptagen och motorcykelplatsen ledig, eller båda bilplatser lediga och motorcykelplatsen upptagen, dvs $\mathbb{P}(X = 1) = \frac{24}{65} \cdot \frac{8}{9} + \frac{32}{65} \cdot \frac{1}{9} \approx 0.38$. På liknande sätt fås $\mathbb{P}(X = 2) = \frac{9}{65} \cdot \frac{8}{9} + \frac{24}{65} \cdot \frac{1}{9} \approx 0.16$ och $\mathbb{P}(X = 3) = \frac{9}{65} \cdot \frac{1}{9} \approx 0.02$.