

Tentamen i Stokastiska processer och simulering I

23 april 2025

Examinator: Maria Deijfen.

Tillåtna hjälpmedel: Formelsamling och miniräknare som delas ut med tentan.

Återlämning: Resultat läggs in i Ladok senast onsdag 7 maj.

Varje korrekt löst uppgift ger 10 poäng. För godkänt betyg krävs minst 20 poäng på basdelen. Den svårare delen rättas endast om basdelen är godkänd och betyget sätts då utifrån poängen på den svårare delen: E:0-6, D:7-12, C:13-18, B:19-24, A:25-30. Resonemang skall vara klara och tydliga att följa. Införda beteckningar ska definieras.

Basdel

Uppgift 1

Antalet kunder som handlar i en elektronikaffär under en given timme är en stokastisk variabel med väntevärde 10 och standardavvikelse 2. Varje kund handlar för ett belopp med väntevärde 840 kr och standardavvikelse 80 kr. Beräkna väntevärde och standardavvikelse för det sammanlagda beloppet som affären säljer för under den givna timmen. Ange vilka antaganden du behöver göra för att kunna göra beräkningen.

Uppgift 2

Nedanstående matriser (fyra stycken) är övergångsmatriser för Markovkedjor, där + betecknar strikt positiva tal sådana att radsummorna blir 1. För var och en av kedjorna, dela in tillstånden i klasser, ange om klasserna är rekurrenta eller transienta, och ange deras period.

$$\mathbf{P}_1 = \begin{pmatrix} + & 0 & + & 0 \\ + & + & 0 & 0 \\ + & 0 & 0 & + \\ + & + & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \mathbf{P}_2 = \begin{pmatrix} + & + & 0 & + \\ 0 & + & 0 & 0 \\ + & + & + & 0 \\ 0 & 0 & 0 & + \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{P}_3 = \begin{pmatrix} 0 & + & 0 & 0 \\ 0 & 0 & + & 0 \\ 0 & 0 & 0 & + \\ + & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \mathbf{P}_4 = \begin{pmatrix} 0 & + & + & 0 \\ 0 & + & 0 & + \\ + & 0 & 0 & + \\ 0 & + & 0 & + \end{pmatrix}$$

Uppgift 3

Till en larmcentral inkommer larm enligt en Poissonprocess med intensitet $\lambda = 5$ larm per timme.

- Centralen öppnar klockan 7.00. Vad är sannolikheten att det dröjer mer än en halvtimme innan dagens första larm inkommer?
- Om det fortfarande inte har kommit något larm klockan 7.30, vad är sannolikheten att det dröjer ytterligare en halvtimme innan dagens första larm inkommer?
- Vad är sannolikheten att det inkommer mindre än tre larm mellan klockan 7.00 och 8.00?
- Om vi får veta att det kom precis tre larm mellan klockan 7.00 och 8.00, vad är sannolikheten att precis två av dem inkom innan klockan 7.30?

Svårare del

Uppgift 4

En Markovkedja $X_0, X_1, \dots$ i diskret tid har sex tillstånd numrerade $1, \dots, 6$. Övergångsmatrisen, med tillstånden ordnade i nummerordning, är

$$\mathbf{P} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1/3 & 0 & 1/3 & 0 & 1/3 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1/6 & 0 & 1/2 & 0 & 1/3 \\ 1/2 & 0 & 1/2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1/2 & 0 & 1/2 \end{pmatrix}.$$

- Motivera varför gränsvärdet $\lim_{n \rightarrow \infty} \mathbf{P}(X_n = 5 | X_0 = 1)$ existerar och beräkna detta.
- Antag att kedjan startar i tillstånd 2. Beräkna det förväntade antalet besök till tillstånd 6 före det första besöket i tillstånd 4.

Uppgift 5

Till en elektronikaffär med två expediter kommer kunder enligt en Poisson-process med intensiteten 12 kunder/timme. Kunderna betjänas i den ordning de kommer och betjäningstiderna är oberoende och exponentialfördelade med väntevärdet 5 minuter. Affären antas (lite orealistiskt) ha oändlig kapacitet. Härled fördelningen för antalet kunder i affären efter lång tid.

Uppgift 6

Låt de stokastiska variablerna $X_1, \dots, X_n$ vara oberoende och exponentialfördelade med parameter μ (dvs väntevärde $1/\mu$). Låt Y vara den minsta av $X_1, \dots, X_n$ och Z den näst minsta.

- a) Beräkna väntevärde och varians för Y .
- b) Beräkna väntevärde och varians för Z .