

# Lösningar

23 april 2025

---

## Uppgift 1

Låt  $N$  beteckna antalet kunder under den givna timmen och  $X_i$  beloppet som den  $i$ :te kunden handlar för. Det sammanlagda beloppet  $S$  ges då av  $\sum_{i=1}^N X_i$ . Vi antar att beloppen är oberoende och även oberoende av antalet kunder. Då fås att

$$\mathbb{E}[S] = \mathbb{E}[N]\mathbb{E}[X_1] = 10 \cdot 840 = 8400 \text{ kr}$$

och

$$\text{Var}(S) = \text{Var}(X)\mathbb{E}[N] + \mathbb{E}[X]^2\text{Var}(N) = 80^2 \cdot 10 + 840^2 \cdot 2^2 = 2886400,$$

dvs standardavvikelsen är 1699 kr.

## Uppgift 2

**P<sub>1</sub>:** Alla tillstånd utgör en enda klass, som är rekurrent och aperiodisk.

**P<sub>2</sub>:** Varje tillstånd utgör en egen aperiodisk klass,  $\{1\}$  och  $\{3\}$  är transienta,  $\{2\}$  och  $\{4\}$  är rekurrenta.

**P<sub>3</sub>:** Alla tillstånd utgör en enda klass, som är rekurrent och har period 4.

**P<sub>4</sub>:**  $\{1, 3\}$  är en transient klass med period 2,  $\{2, 4\}$  är en rekurrent aperiodisk klass.

### Uppgift 3

a) Tiden  $T$  tills det första larmet kommer är  $\text{Exp}(5)$ -fördelad, så  $\mathbb{P}(T \geq 0.5) = e^{-5 \cdot 0.5} \approx 0.082$ .

b) Eftersom Poissonprocessen har oberoende inkrement är sannolikheten densamma som i a).

c) Antalet larm mellan kl 7 och 8 är  $\text{Po}(5)$ -fördelat och sannolikheten att det kommer färre än tre larm är alltså

$$e^{-5} + 5e^{-5} + \frac{5^2}{2!}e^{-5} \approx 0.125.$$

d) Larmen är likformigt fördelade mellan kl 7 och 8, så antalet larm mellan kl 7 och 7.30 är  $\text{Bin}(3, 0.5)$ -fördelat. Sannolikheten att precis två larm inkommer då är alltså  $\binom{3}{2} \left(\frac{1}{2}\right)^3 = 0.375$ .

### Uppgift 4

a) Om man startar i tillstånd 1 så kan man i framtiden bara befinna sig i tillstånd 1, 3 eller 5. Övergångsmatrisen för motsvarande Markovkedja är

$$\mathbf{P} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1/2 & 1/2 & 0 \end{pmatrix}.$$

Detta är övergångsmatrisen för en ergodisk (irreducibel och aperiodisk) Markovkedja och därmed existerar gränsvärdet  $\pi_i = \lim_{n \rightarrow \infty} \mathbb{P}(X_n = i | X_0 = 1)$  för  $i = 1, 3, 5$ . Gränsfördelningen  $\pi = (\pi_1, \pi_3, \pi_5)$  löser  $\pi \mathbf{P} = \pi$ , som har lösning  $\pi = (2/5, 1/5, 2/5)$ . Det sökta gränsvärdet är alltså  $2/5$ .

b) Om man startar i tillstånd 2 så kan man i framtiden bara befinna sig i tillstånd 2, 4 eller 6. Vi är bara intresserade av vad som händer fram till den första gången kedjan besöker tillstånd 4 och gör därför om tillstånd 4 till absorberande. Vi får då följande övergångsmatris på standardform för tillstånden 2, 6 och 4 (i den ordningen):

$$\mathbf{P} = \begin{pmatrix} 1/3 & 1/3 & 1/3 \\ 0 & 1/2 & 1/2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{P}_T & \mathbf{R} \\ 0 & 1 \end{pmatrix},$$

där  $\mathbb{P}_T = \begin{pmatrix} 1/3 & 1/3 \\ 0 & 1/2 \end{pmatrix}$ . Det förväntade antalet besök i de transienta tillstånden 2 och 6 innan absorption i tillstånd 4 ges av matrisen

$$\mathbb{S} = (\mathbf{1} - \mathbb{P}_T)^{-1} = \begin{pmatrix} 3/2 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

Den första raden svarar mot starttillstånd 2 och det sammanlagda antalet besök i tillstånd 6 innan absorption ges av elementet  $S_{12} = 1$ .

### Uppgift 5

Låt  $X(t)$  beteckna antalet personer i systemet vid tid  $t$ . Då är  $X(t)$  en födelse-dödsprocess med födelseintensitet  $\lambda_n \equiv 12$  och dödsintensiteter  $\mu_1 = 12$  och  $\mu_n = 24$  för  $n \geq 2$ . Låt  $r_n = (\lambda_0 \cdots \lambda_{n-1})/(\mu_1 \cdots \mu_n)$  för  $n \geq 1$  och sätt  $r_0 = 1$ . En asymptotisk fördelning existerar om  $\sum_{n=0}^{\infty} r_n < \infty$ . Vi har  $r_n = (1/2)^{n-1}$  för  $n \geq 1$  och alltså  $\sum_{n=0}^{\infty} r_n = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} (1/2)^{n-1} = 3$ . En asymptotisk fördelning existerar alltså och ges av

$$p_n = \frac{r_n}{\sum_{k=0}^{\infty} r_k} = \frac{r_n}{3} = \begin{cases} \frac{1}{3} & \text{om } n = 0; \\ \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2^{n-1}} & \text{om } n \geq 1. \end{cases}$$

### Uppgift 6

**a)** Minimum av  $n$  oberoende  $\text{Exp}(\mu)$ -variabler är  $\text{Exp}(n\mu)$ -fördelat och vi får alltså att  $\mathbb{E}[Y] = (n\mu)^{-1}$  och  $\text{Var}(Y) = (n\mu)^{-2}$ .

**b)** Låt  $M_n$  beteckna minimum av  $n$  stycken oberoende exponentialvariabler med parameter  $\mu$ . Eftersom exponentialfördelningen är minneslös har vi att  $Z \stackrel{d}{=} M_n + M_{n-1}$ , där  $M_n$  och  $M_{n-1}$  är oberoende. Vi får alltså

$$\mathbb{E}[Z] = \mathbb{E}[M_n] + \mathbb{E}[M_{n-1}] = \frac{1}{n\mu} + \frac{1}{(n-1)\mu} = \frac{2n-1}{n(n-1)\mu}$$

och

$$\text{Var}(Z) = \text{Var}(M_n) + \text{Var}(M_{n-1}) = \frac{1}{n^2\mu^2} + \frac{1}{(n-1)^2\mu^2} = \frac{2n^2 - 2n - 1}{n^2(n-1)^2\mu^2}.$$