

Tentamen i Stokastiska processer och simulering I

9 juni 2025

Examinator: Maria Deijfen.

Tillåtna hjälpmedel: Formelsamling och miniräknare som delas ut med tentan.

Återlämning: Resultat läggs in i Ladok senast onsdag 19 juni.

Varje korrekt löst uppgift ger 10 poäng. För godkänt betyg krävs minst 20 poäng på basdelen. Den svårare delen rättas endast om basdelen är godkänd och betyget sätts då utifrån poängen på den svårare delen: E:0-6, D:7-12, C:13-18, B:19-24, A:25-30. Resonemang skall vara klara och tydliga att följa. Införda beteckningar ska definieras.

Basdel

Uppgift 1

En viltvårdare räknar antalet djur i ett område och är speciellt intresserad av antalet rävar. För ändamålet har hon monterat en kamera i området. Varje dag passerar N djur kameran, där $\mathbf{E}[N] = 20$ och $\text{Var}(N) = 16$. Låt Y beteckna antalet rävar som passerar en given dag. Bestäm $\mathbf{E}[Y]$ och $\text{Var}(Y)$ om sannolikheten att ett passerande djur är en räv är 0.3. Alla involverade variabler antas vara oberoende.

Uppgift 2

Vädret i Storstad klassificeras varje dag som antingen regnigt, mullet eller soligt, och kan beskrivas som en Markovkedja i diskret tid med övergångsmatris (där tillstånd 1 = regnigt, 2 = mullet, 3 = soligt)

$$\mathbf{P} = \begin{pmatrix} 3/5 & 0 & 2/5 \\ 2/10 & 3/10 & 5/10 \\ 0 & 1/4 & 3/4 \end{pmatrix}.$$

- a) Motivera att en asymptotisk fördelning existerar samt bestäm denna.
- b) Karin ska tillbringa tre dagar i Storstad, och den första dagen är det mulet väder. Bestäm sannolikheten att de två nästföljande dagarna är soliga.

Uppgift 3

Ett modeföretag säljer sina produkter via en hemsida där besöksströmmen beskrivs av en Poissonprocess med intensitet 100 per timme. Ett besök på hemsidan resultera i en order oberoende med sannolikhet 0.05.

- a) Vilken fördelning har antalet beök på hemsidan under ett dygn?
- b) Vilken fördelning har antalet inkomna ordrar under ett dygn?
- c) Om man får veta att antalet besök på hemsidan under ett givet dygn är 2000, vad är då fördelningen för antalet ordrar under samma dygn?
- d) Vilken fördelning har tiden mellan två ordrar?

Svårare del

Uppgift 4

En Markovkedja i diskret tid har tillståndsrummet $\{0, 1, 2, 3\}$ och övergångsmatrisen

$$\mathbf{P} = \begin{pmatrix} \alpha & \beta & 0 & 0 \\ \alpha & 0 & \gamma & \delta \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & \alpha & \beta & 0 \end{pmatrix},$$

där $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ är tal som alla är större än 0.

- a) Ange övriga villkor på $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ för att $\mathbf{P}$ ska vara en övergångsmatris.
- b) Antag att Markovkedjan startar i tillstånd 0. Bestäm sannolikheten att den är i tillstånd 3 efter 3 steg.
- c) Antag att Markovkedjan startar i tillstånd 0. Bestäm sannolikheten att den aldrig kommer till tillstånd 3.

Uppgift 5

Låt X_n beteckna storleken hos den n :te generationen i en förgreningsprocess där $X_0 = 1$ och sannolikheten att en viss individ får j avkomor är $q^j(1-q)$ för $j = 0, 1, 2, \dots$, där $q \in (0, 1)$.

- a) Beräkna $\mathbf{E}[X_9]$.
- b) Bestäm för varje q sannolikheten att populationen slutligen dör ut.
- c) Hur ändras svaret i b) om $X_0 = 7$?

Uppgift 6

Till ett kösystem med en betjänt anländer kunder enligt en Poissonprocess med intensiteten tio per timme. Betjäningstiderna är oberoende och exponentialfördelade med väntevärdet tio minuter. Vänterummet rymmer tre personer, dvs medräknat den kund som just betjänas kan det finnas högst fyra personer i systemet. Kunder som anländer och finner systemet fullt blir avvisade. Antag att systemet har varit i drift så länge att stationära förhållanden råder.

- a) Hur stor andel av de möjliga kunderna blir avvisade?
- b) Vad är väntevärdet av antalet kunder i systemet?