

Lösningar

11 juni 2025

Uppgift 1

Låt $X_i = 1$ om det *ite* djuret som passerar är en räv och $X_i = 0$ annars. Då gäller att $Y = \sum_{i=1}^N X_i$. Eftersom alla variabler är oberoende av varandra fås att

$$\mathbb{E}[Y] = \mathbb{E}[N]\mathbb{E}[X_1] = 20 \cdot 0.3 = 6$$

och

$$\text{Var}(Y) = \text{Var}(X)\mathbb{E}[N] + \mathbb{E}[X]^2\text{Var}(N) = 0.3 \cdot 0.7 \cdot 20 + 0.3^2 \cdot 16 = 5.64.$$

Uppgift 2

a) Övergångsmatrisen beskriver en irreducibel aperiodisk kedja. För en sådan kedja existerar en asymptotisk fördelning π som bestäms av ekvationssystemet $\pi\mathbf{P} = \pi$, tillsammans med villkoret att $\sum \pi_i = 1$. Man får $\pi_1 = 5/43$, $\pi_2 = 10/43$, $\pi_3 = 28/43$.

b) Den sökta sannolikheten ges av $P_{23}P_{33} = \frac{5}{10} \cdot \frac{3}{4} = \frac{3}{8}$.

Uppgift 3

a) $\text{Po}(2400)$

b) Ordrar utgör en Poissonprocess med intensitet 5 per timme. Den sökta fördelningen är alltså $\text{Po}(5 \cdot 24) = \text{Po}(120)$.

c) Bin(2000,0.05)

d) Exponentialfördelad med väntevärde 1/5 timme (12 min).

Uppgift 4

a) I en övergångsmatris ska radsummorna vara 1. Detta blir fallet om $\alpha + \beta = 1$ och $\gamma + \delta = \beta$.

b) Genom att studera övergångsmatrisen ser man att, vid start i tillstånd 0 finns bara en möjlighet att vara i tillstånd 3 efter tre steg, nämligen att kedjan utveckling blir $0 \rightarrow 0 \rightarrow 1 \rightarrow 3$. Sannolikheten för detta är $P_{00}P_{01}P_{13} = \alpha\beta\delta$. Samma resultat får man genom att beräkna $\mathbf{P}^3$ och läsa av element P_{03}^3 .

c) Den sökta sannolikheten kan bestämmas genom att göra tillstånd 3 absorberande. Det finns då två absorberande tillstånd, 2 och 3, och vi vill beräkna sannolikheten att absorption inte sker i tillstånd 3, utan i tillstånd 2. Vi får den nya övergångsmatrisen (på standardform)

$$\mathbf{P} = \begin{pmatrix} \alpha & \beta & 0 & 0 \\ \alpha & 0 & \gamma & \delta \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

där övergångssannolikheterna mellan de transienta tillstånden 0 och 1 ges i $\mathbf{P}_t$ och övergångssannolikheterna från de transienta till de rekurrenta (absorberande) tillstånden ges i $\mathbf{R}$, med

$$\mathbf{P}_t = \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \alpha & 0 \end{pmatrix} \quad \mathbf{R} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ \gamma & \delta \end{pmatrix}.$$

Sannolikheten att absorberas i de olika absorberande tillstånden ges av $\mathbf{SR}$, där

$$\mathbf{S} = (\mathbf{I} - \mathbf{P}_t)^{-1} = \frac{1}{\beta^2} = \begin{pmatrix} 1 & \beta \\ 1 - \beta & \beta \end{pmatrix}$$

(här har sambandet $\alpha + \beta = 1$ använts), vilket ger

$$\mathbf{SR} = \begin{pmatrix} \gamma/\beta & \delta/\beta \\ \gamma/\beta & \delta/\beta \end{pmatrix}$$

Den sökta sannolikheten ges alltså av γ/β .

Uppgift 5

Avkomman är geometriskt fördelad med parameter $p = 1 - q$ och väntevärde $\mu = q/p$.

a) $\mathbb{E}[X_9] = \mu^9 = (q/p)^9$.

b) Låt π_0 beteckna sannolikheten att populationen så småningom dör ut. Om $\mu \leq 1$, dvs om $q \leq 1/2$, så gäller att $\pi_0 = 1$. Om $\mu > 1$ så ges π_0 av den minsta positiva lösningen till ekvationen $x = \sum_{j=0}^{\infty} \mathbb{P}(X_1 = j)x^j$, där

$$\sum_{j=0}^{\infty} \mathbb{P}(X_1 = j)x^j = (1 - q) \sum_{j=0}^{\infty} (qx)^j = \frac{1 - q}{1 - qx}.$$

Ekvationen blir alltså $x(1 - qx) = (1 - q)$, och den sökta lösningen $\frac{1-q}{q}$.

Uppgift 6

Systemet utgör en M/M/1-kö med ändlig kapacitet. Kunder ankommer enligt en Poissonprocess med intensitet tio per timme, dvs $1/6$ per minut. Betjäningstiderna är oberoende och exponentialfördelade med väntevärde 10 minuter. Det finns plats för fyra personer i systemet, som kan analysera som en födelse-dödsprocess med födelseintensitet $\lambda_i = 1/6$ för $i = 0, 1, 2, 3$ och dödsintensitet $\mu_i = 1/10$ för $i = 1, 2, 3, 4$. Låt $\rho_n = \frac{\lambda_0 \cdots \lambda_{n-1}}{\mu_1 \cdots \mu_n} = (5/3)^n$ för $n \geq 1, 2, 3, 4$ och $\rho_0 = 1$. Den asymptotiska fördelningen för antalet personer i systemet ges då av $p_n = \rho_n / \sum \rho_n$.

a) Kunder blir avvisade om systemet är fullt, dvs om det redan befinner sig fyra personer där. Andelen kunder som blir avvisade ges alltså av

$$p_4 = \frac{\rho_4}{\sum_{i=0}^4 \rho_i} = \frac{(5/3)^4}{1 + 5/3 + (5/3)^2 + (5/3)^3 + (5/3)^4} \approx 0.43.$$

b) Det förväntade antalet kunder i systemet ges av $\sum_{i=0}^4 i p_i \approx 2.92$.