

Tentamen i Stokastiska processer och simulering I

13 mars 2026

Examinator: Maria Deijfen.

Tillåtna hjälpmedel: Formelsamling och miniräknare som delas ut med tentan.

Återlämning: Resultat läggs in i Ladok senast fredag 27 mars.

Varje korrekt löst uppgift ger 10 poäng. För godkänt betyg krävs minst 20 poäng på basdelen. Den svårare delen rättas endast om basdelen är godkänd och betyget sätts då utifrån poängen på den svårare delen: E:0-6, D:7-12, C:13-18, B:19-24, A:25-30. Resonemang skall vara klara och tydliga att följa. Införda beteckningar ska definieras.

Basdel

Uppgift 1

Låt X vara likormigt fördelad på intervallet $(0, 1)$. Givet att $X = x$, så är Y binomial($6, x$)-fördelad.

- Bestäm $\mathbf{E}[Y]$.
- Bestäm $\text{Var}(Y)$.

Uppgift 2

En Markovkedja $\{X_n\}_{n=0}^{\infty}$ har tillståndsrum $\{1, 2, 3, 4\}$ och övergångsmatris (med tillstånden ordnade i nummerordning)

$$\mathbf{P} = \begin{pmatrix} 0.5 & 0 & 0.5 & 0 \\ 0 & 0.2 & 0 & 0.8 \\ 0.25 & 0 & 0.75 & 0 \\ 0 & 0.6 & 0 & 0.4 \end{pmatrix}.$$

- Dela in kedjan i klasser och ange för varje klass om den är rekurrent eller transient samt om någon klass är periodisk.

b) Bestäm $\mathbf{P}(X_6 = 3 | X_4 = 1, X_3 = 1)$.

c) Antag att Markovkedjan startar i tillstånd 2. Bestäm sannolikheten att den är i tillstånd j efter lång tid för $j = 1, \dots, 4$.

Uppgift 3

Betrakta en förgreningsprocess i diskret tid där individer ger upphov till noll barn med sannolikhet $1 - p$, ett barn med sannolikhet $p/2$ och två barn med sannolikhet $p/2$.

a) För vilka värden på p dör processen säkert ut?

b) Vad är sannolikheten att processen dör ut för $p = 0.8$?

Svårare del

Uppgift 4

På en parkering finns det tre parkeringsplatser. Bilar anländer till parkeringsplatsen enligt en Poissonprocess med intensiteten 0.2 bilar per minut. En bil som anländer till parkeringsplatsen ställer sig på parkeringen om det finns en ledig plats. Parkeringstiderna är oberoende exponentialfördelade variabler med väntevärde 10 minuter, och även oberoende av bilarnas ankomster.

a) Bestäm andelen tid som parkeringen är tom i långa loppet.

b) Bestäm det förväntade antalet bilar på parkeringen efter lång tid.

Uppgift 5

En taxiförare cirkulerar mellan Södermalm (1), Vasastan (2), Östermalm (3) och Kungsholmen (4). När hon har lämnat av en kund plockar hon genast upp en ny på den plats hon befinner sig. Om en kund stiger på i stadsdelen i så ges sannolikheten att hen vill stiga av i stadsdelen j av p_{ij} , där sannolikheterna $\{p_{ij}\}$ bildar matrisen

$$\mathbf{P} = \begin{pmatrix} 0 & 1/3 & 1/3 & 1/3 \\ 1/3 & 0 & 1/2 & 1/6 \\ 1/15 & 1/15 & 4/5 & 1/15 \\ 1/4 & 1/4 & 1/4 & 1/4 \end{pmatrix}.$$

Taxiföraren börjar arbetsdagen på Östermalm, där hon bor där. Hon känner till bra lunchställen på Söder och i Vasastan och bestämmer sig för att äta i den stadsdel hon kommer till först, dvs får hon en körning till Söder innan Vasastan, äter hon på Söder och vice versa.

- a) Beräkna det förväntade antalet passagerare som hon tar upp innan hon äter lunch.
- b) Beräkna sannolikheten att hon äter lunch på Söder.

Uppgift 6

Betrakta följande två alternativ för att avgöra en hockeymatch när det är oavgjort efter full tid:

Metod I. Sudden death, dvs man fortsätter spela tills något av lagen gör mål. Målgörande lag räknas som segrare.

Metod II. Båda lagen får först lägga fem straffar mot motståndarens målvakt. Om något lag lyckats med fler straffar än det andra laget så räknas det som segrare. Om det fortfarande är oavgjort så spelar man Sudden death.

Två lag A och B möts. Man vet av erfarenhet att lag B är något bättre än lag A på straffar: En serie straffar leder med sannolikhet 0.25 till att lag A vinner och med sannolikhet 0.35 till att lag B vinner (och med sannolikhet 0.4 slutar straffläggningen oavgjort). Under allt övrigt spel gör lag A mål enligt en Poissonprocess med intensitet ett mål var tionde minut, och lag B gör mål enligt en Poissonprocess med intensiteten ett mål var tolfte minut, där de båda processerna är oberoende.

- a) Vad är sannolikheten att en match fortfarande är oavgjord fem minuter efter ett eventuellt Sudden death-spel börjar?
- b) Antag att det är oavgjort efter full tid. Vad är sannolikheten att lag A vinner med Metod I respektive Metod II?

Lycka till!