

## Tentamen i Stokastiska processer och simulering I

7 maj 2026

*Examinator:* Maria Deijfen.

*Tillåtna hjälpmedel:* Formelsamling och miniräknare som delas ut med tentan.

*Återlämning:* Resultat läggs in i Ladok senast 19 maj.

Varje korrekt löst uppgift ger 10 poäng. För godkänt betyg krävs minst 20 poäng på basdelen. Den svårare delen rättas endast om basdelen är godkänd och betyget sätts då utifrån poängen på den svårare delen: E:0-6, D:7-12, C:13-18, B:19-24, A:25-30. Resonemang skall vara klara och tydliga att följa. Införda beteckningar ska definieras.

### Basdel

#### Uppgift 1

Den stokastiska variabeln  $Y$  är exponentialfördelad med väntevärde  $1/2$ . Givet  $Y = y$  gäller att  $X$  är normalfördelad med väntevärde  $y$  och varians 4.

- a) Bestäm  $\mathbf{E}[X]$ .
- b) Bestäm  $\text{Var}(X)$ .

#### Uppgift 2

En maskin kan befinna sig i tre tillstånd 1, 2 och 3. I tillstånden 1 och 2 fungerar maskinen. I tillstånd 3 är maskinen trasig. Låt  $X_n$  beteckna maskinens tillstånd dag  $n$  och antag att  $\{X_n\}_{n=0}^{\infty}$  är en Markovkedja i diskret tid med övergångsmatris

$$\mathbf{P} = \begin{pmatrix} 3/8 & 4/8 & 1/8 \\ 1/12 & 8/12 & 3/12 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

- a) Bestäm andelen tid som maskinen fungerar.
- b) Vi är intresserade av att bestämma  $\mathbf{P}(X_{10} = j | X_0 = i)$  för  $i, j \in \{1, 2, 3\}$ . Beskriv hur vi kan beräkna dessa sannolikheter med hjälp av matrisen  $\mathbf{P}$ .

### Uppgift 3

Människor passerar en butik på en affärsgata enligt en Poissonprocess med intensitet 60 personer per timme. Butiken har öppet kl 10-18 och passerande människor går då in i butiken med sannolikhet 0.1 oberoende av varandra.

- a) Vad är sannolikheten att det dröjer mer än 10 minuter innan dagens första besökare kommer in i butiken?
- b) Vilken fördelning har antalet besökare i butiken mellan kl 10 och 11?
- c) Om vi får veta att det har passerat 70 personer på affärsgatan mellan kl 10 och 11, vilken fördelning har då antalet besökare i butiken mellan kl 10 och 11?
- d) Om butiken har haft precis fem besökare mellan kl 10 och 11, vad är sannolikheten att alla dessa kom mellan kl 10.30 och 11?

### Svårare del

#### Uppgift 4

Kunder kommer till en betjäningstation enligt en Poissonprocess med intensiteten 0.5 kunder per minut. Det finns två typer av kunder, typ  $A$  och typ  $B$ , och 30% av kunderna är av typ  $B$ . Kunder som finner betjäningstationen upptagen väntar inte, utan försvinner. Betjäningstiderna är oberoende exponentialfördelade variabler som också är oberoende av ankomstprocessen. För kunder av typ  $A$  har betjäningstiden väntevärde 1 minut och för kunderna av typ  $B$  är väntevärdet 2 minuter. Hur stor del av tiden är betjäningstationen ledig i långa loppet?

#### Uppgift 5

För att öka försäljningen av frukostflingor har ett livsmedelsföretag tagit fram en samlarserie som består av fyra olika bilder. I varje flingpaket finns två bilder, som kan betraktas som slumpmässigt valda bland de fyra möjliga, där valet sker utan återläggning (dvs de två bilderna i ett paket är alltid olika). Uno vill gärna ha alla de fyra olika bilderna. Låt  $X_n$  vara antalet *olika* bilder som han har i sin samling efter att ha köpt  $n$  paket, med  $X_0 = 0$ .

I sitt första paket får han två olika bilder så  $X_1 = 2$ . Därefter gäller att  $\{X_n\}_{n=1}^\infty$  är en Markovkedja med tillståndsrum  $\{2, 3, 4\}$ .

a) Bestäm övergångsmatrisen för Markovkedjan och ange vilka tillstånd som är transienta respektive rekurrenta.

b) Beräkna det förväntade antalet flingpaket som Uno måste köpa för att få alla bilderna.

### Uppgift 6

Det adliga namnet Gyllenstrumpa förs vidare från fäder till sönder. Varje man i släkten får antingen 0, 1 eller 2 söner med sannolikheterna 0.2, 0.3 respektive 0.5. Just nu lever en enda man som bär namnet von Gyllenstrumpa. Beräkna sannolikheten att släktnamnet är utdött efter tre generationer, dvs sannolikheten att mannen inte får några sonsöner.

*Ledning: Låt  $a_n$  beteckna sannolikheten att släktnamnet är utdött efter  $n$  generationer och uttryck  $a_n$  i termer av  $a_{n-1}$  genom betingning på antalet män i den första generationen.*

*Lycka till!*