

# Lösningar

13 mars 2026

---

## Uppgift 1

a)  $\mathbb{E}[X] = \mathbb{E}[\mathbb{E}[X|Y]] = \mathbb{E}[Y] = 1/\lambda = 1/2.$

b)  $\text{Var}(X) = \mathbb{E}[\text{Var}(X|Y)] + \text{Var}(\mathbb{E}[X|Y]) = 4 + \text{Var}(Y) = 4 + 1/\lambda^2 = 17/4.$

## Uppgift 2

a) Kedjan är irreducibel och aperiodisk och har alltså en asymptotisk fördelning  $\pi = (\pi_1, \pi_2, \pi_3)$  som bestäms av  $\pi = \pi \mathbf{P}$  tillsammans med kravet att  $\sum \pi_i = 1$ . Detta ger  $\pi = (2/6, 3/6, 1/6)$  och maskinen fungerar alltså i långa loppet  $2/6 + 3/6 = 5/6$  av tiden.

b) Sannolikheten  $\mathbb{P}(X_{10} = j | X_0 = i)$  ges av elementet på rad  $i$  kolumn  $j$  i matrisen  $\mathbf{P}^{10}$ .

## Uppgift 3

a) Kunder kommer in i butiken enligt en Poissonprocess med intensitet  $60 \cdot 0.1 = 6$  kunder per timme. Tiden  $T$  till den första kunden kommer in är  $\text{Exp}(6)$ -fördelad (räknat i timmar) och den sökta sannolikheten är  $\mathbb{P}(T > 1/6) = e^{-6 \cdot 1/6} = e^{-1}$ .

b)  $\text{Po}(6)$

c)  $\text{Bin}(70, 0.1)$

d) Besökstiderna är oberoende och likformigt fördelade mellan kl 10 och 11. Sannolikheten att en given besökare kom mellan kl 10.30 och 11 är alltså  $1/2$  och sannolikheten att alla fem besökare gjorde det är  $(1/2)^5 = 0.03125$ .

### Uppgift 4

Låt  $X(t) = 0$  om en kund av typ  $A$  betjänas,  $X(t) = 1$  om systemet är ledigt och  $X(t) = 2$  om en kund av typ  $B$  betjänas. Då är  $X(t)$  en födelse-dödsprocess med  $\lambda_0 = 1$  (1/betjäningstid för typ  $A$ ),  $\lambda_1 = 0.3 \cdot 0.5$  (ankomstintensitet för typ  $B$ ) och  $\mu_1 = 0.7 \cdot 0.5$  (ankomstintensitet för typ  $A$ ),  $\mu_2 = 0.5$  (1/betjäningstid för typ  $B$ ). Vi får  $r_1 = \lambda_0/\lambda_1 = 100/35$  och  $r_2 = \lambda_0\lambda_1/(\mu_1\mu_2) = 30/35$  och sannolikheten att systemet är tomt blir  $r_1/(1 + r_1 + r_2) = 100/165 = 0.606$ .

### Uppgift 5

a) För att stanna kvar i tillstånd 2 (respektive gå till tillstånd 4) ska båda kort väljas bland de två man redan har (respektive inte har), vilket har sannolikhet  $\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{3} = \frac{1}{6}$ . Befinner man sig i tillstånd 3, stannar man kvar där med sannolikhet  $\frac{1}{2}$ . Övergångsmatrisen blir alltså:

$$\mathbf{P} = \begin{pmatrix} 1/6 & 4/6 & 1/6 \\ 0 & 1/2 & 1/2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Tillstånd 4 är rekurrent (absorberande), tillstånd 2 och 3 är transienta.

b) Det förväntade antalet besök i de rekurrenta tillstånden 2 och 3 innan absorption i tillstånd 4 bestäms av matrisen  $\mathbb{S} = (\mathbf{1} - \mathbb{P}_T)^{-1}$ , där  $\mathbb{P}_T = \begin{pmatrix} 1/6 & 4/6 \\ 0 & 1/2 \end{pmatrix}$ . Vi får

$$\mathbb{S} = \frac{12}{5} \begin{pmatrix} 1/2 & 4/6 \\ 0 & 5/6 \end{pmatrix}.$$

Här svarar första raden mot start i tillstånd 2. Kommer vi också ihåg det första paketet han köpte så blir det förväntade totala antalet paket han måste köpa  $1 + \frac{6}{5} + \frac{8}{5} = \frac{19}{5}$ .

### Uppgift 6

Låt  $X_n$  beteckna antalet män i generation  $n$  och låt  $a_n = \mathbb{P}(X_n = 0 | X_0 = 1)$ . Vi söker  $a_3$ . Genom att betinga på antalet män i den första generationen

och utnyttja minnelöshet och tidshomogenitet får vi

$$\begin{aligned} a_n &= \sum_{k=0}^2 \mathbb{P}(X_n = 0 | X_0 = 1, X_1 = k) \mathbb{P}(X_1 = k | X_0 = 1) \\ &= \sum_{k=0}^2 \mathbb{P}(X_{n-1} = 0 | X_0 = k) \mathbb{P}(X_1 = k | X_0 = 1). \end{aligned}$$

Här gäller att  $\mathbb{P}(X_{n-1} = 0 | X_0 = k) = a_{n-1}^k$ , eftersom händelsen innebär att  $k$  oberoende stammar dör ut. Låt  $p_k$  beteckna sannolikheten att en given man får  $k$  söner (dvs  $p_0 = 0.2$ ,  $p_1 = 0.3$  och  $p_2 = 0.5$ ) och definiera  $G(x) = \sum_{k=0}^2 p_k x^k$ . Vi har då enligt ovan att  $a_n = G(a_{n-1})$  och kan beräkna  $a_1 = G(a_0) = G(0) = 0.2$ ,  $a_2 = G(0.2) = 0.28$  och slutligen  $a_3 = G(0.28) = 0.3232$ .