

Tentamen i Stokastiska processer och simulering I

18 augusti 2026

Examinator: Maria Deijfen.

Tillåtna hjälpmedel: Formelsamling och miniräknare som delas ut med tentan.

Återlämning: Resultat läggs in i Ladok senast 31 augusti.

Varje korrekt löst uppgift ger 10 poäng. För godkänt betyg krävs minst 20 poäng på basdelen. Den svårare delen rättas endast om basdelen är godkänd och betyget sätts då utifrån poängen på den svårare delen: E:0-6, D:7-12, C:13-18, B:19-24, A:25-30. Resonemang skall vara klara och tydliga att följa. Införda beteckningar ska definieras.

Basdel

Uppgift 1

I ett flygplan finns 30 platser. Flygrutten har i genomsnitt något fler manliga än kvinnliga passagerare – sannolikheten att en given passagerare är man är $2/3$ oberoende av andra passagerare. Manliga passagerares vikter är normalfördelade med väntevärde 75 kg och standardavvikelse 9 kg, och vikter för olika passagerare är oberoende. Låt X vara den sammanlagda viken av de manliga passagerarna vid en fullsatt flygning.

a) Bestäm $\mathbf{E}[X]$.

b) Bestäm $\text{Var}(X)$.

Uppgift 2

En Markovkedja i diskret tid har sju tillstånd numrerade 1 till och med 7. Övergångsmatrisen (med tillstånden ordnade i nummerordning) ges av

$$\mathbf{P} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1/2 & 0 & 0 & 0 & 1/2 & 0 & 0 \\ 1/2 & 0 & 0 & 1/2 & 0 & 0 & 0 \\ 1/3 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1/3 & 1/3 \\ 1/3 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1/3 & 1/3 \end{pmatrix}.$$

- a) Dela in kedjan i klasser och ange vilka klasser som är rekurrenta respektive transienta. Ange också klassernas perioder.
- c) Ange $\mathbf{P}(X_n = 3 | X_0 = 2)$ för $n = 1, 2, \dots$
- d) Bestäm $\mathbf{P}(X_{10} = 1 | X_8 = 5, X_7 = 4)$.

Uppgift 3

Båtar passerar genom ett sund enligt en Poissonprocess med intensitet 5 båtar per timme. Sannolikheten att en passerande båt är en segelbåt är 0.6 och sannolikheten att den är motorbåt är 0.4. Typen hos olika båtar är oberoende av varandra. Vilken fördelning har:

- a) det totala antalet passerande båtar om man observerar sundet under tre timmar?
- b) antalet passerande segelbåtar under en timme?
- c) tiden tills man observerar den första passerande båten (oavsett typ)?
- d) tiden mellan den första och den andra passerande motorbåten?
- e) tiden tills man har observerat fem passerande båtar (oavsett typ)?

Svårare del

Uppgift 4

Man förfogar över en urna, svarta och vita kulor samt ett mynt som visar krona med sannolikhet p och klave med sannolikhet $1 - p$. I urnan finns alltid två kulor. Man kastar myntet upprepade gånger. Om det visar krona, drar man på måfå en av kulorna i urnan och ersätter denna med en vit kula. Om det visar klave gör man likadant, men ersätter den dragna kulan med en

svart kula. Låt X_n beteckna antalet vita kulor i urnan efter n myntkast. Då är X_n en Markovkedja.

a) Ange övergångsmatrisen för kedjan.

b) Motivera att en asymptotisk fördelning existerar och bestäm denna.

Uppgift 5

Ett kraftbolag har tre värmekraftverk med kapaciteterna 100, 100 och 200 MW. Kraftverken går sönder oberoende av varandra och för varje kraftverk gäller att den tid det fungerar innan det går sönder är exponentialfördelad med väntvärdet 90 dygn och att reparationstiden är exponentialfördelad med väntevärde 10 dygn. Alla tider är oberoende av varandra. Beräkna sannolikheten att det efter lång tid är kraftverk motsvarande minst 200 MW som är i funktion.

Uppgift 6

I en damm finns tre svanhonor och fem svanhannar. Med slumpmässiga mellanrum bildar en hane och en hona ett par och försvinner från dammen för alltid. Den återstående tiden tills detta inträffar är alltid exponentialfördelad med väntevärde $1/a$, där a är antalet möjliga par som kan bildas bland de återstående fåglarna.

a) Låt $X(t)$ beteckna antalet honor i dammen vid tid t . Skriv upp Kolmogorovs framåtekvationer för de fyra funktionerna

$$P_{3j}(t) = \mathbf{P}(X(t) = j | X(0) = 3) \text{ för } j = 0, 1, 2, 3.$$

(Du behöver inte lösa dem.)

b) Bestäm $\mathbf{P}(X(t) = 3 | X(0) = 3)$ som funktion av t genom att lösa en av framåtekvationerna.