

Lösningar

18 augusti 2026

Uppgift 1

Låt N beteckna antalet män på flygningen. Då gäller att $N \sim \text{Bin}(30, 2/3)$ så att $\mathbb{E}[X] = 20$ och $\text{Var}(X) = 20/3$. Låt också X_i beteckna vikten hos den i :te mannen på flygningen. Vi har då att $X = \sum_{i=1}^N X_i$.

a) $\mathbb{E}[X] = \mathbb{E}[\mathbb{E}[X|N]] = \mathbb{E}[75 \cdot N] = 75 \cdot 20 = 1500.$

b) $\text{Var}(X) = \mathbb{E}[\text{Var}(X|N)] + \text{Var}(\mathbb{E}[X|N]) = \mathbb{E}[9^2 \cdot N] + \text{Var}(75 \cdot N) =$
 $= 9^2 \cdot 20 + 75^2 \cdot \frac{20}{3} = 39120.$

Uppgift 2

a) Klasserna är $\{1\}$ (absorberande, aperiodisk), $\{2, 3\}$ (rekurrent med period 2), $\{4, 5\}$ (transient med period 2) och $\{6, 7\}$ (transient, aperiodisk).

b) Vi har att $\mathbb{P}(X_n = 3|X_0 = 2) = 1$ om n är udda och $\mathbb{P}(X_n = 3|X_0 = 2) = 0$ om n är jämnt.

c) Vi har att

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(X_{10} = 1|X_8 = 5, X_7 = 4) &= \mathbb{P}(X_2 = 1|X_0 = 5) = P_{51}P_{11} + P_{54}P_{41} \\ &= 0.5 \cdot 1 + 0.5 \cdot 0.5 = 0.75.\end{aligned}$$

Uppgift 3

a) $\text{Po}(15)$

b) Po(3)

c) Exp(5)

d) Exp(2)

e) Gamma(5, 5)

Uppgift 4

a) Övergångsmatrisen blir

$$\mathbf{P} = \begin{pmatrix} 1-p & p & 0 \\ (1-p)/2 & 1/2 & p/2 \\ 0 & 1-p & p \end{pmatrix}.$$

b) Kedjan är ändlig, aperiodisk och irreducibel. Det existerar därför en asymptotisk fördelning $\pi = (\pi_0, \pi_1, \pi_2)$ som bestäms av $\pi \mathbf{P} = \pi$ tillsammans med villkoret att $\sum \pi_i = 1$. Detta ger $\pi = (q^2, 2pq, p^2)$.

Uppgift 5

Tillståndet för ett givet kraftverk kan beskrivas av en födelse-dödsprocess med två tillstånd 0 (fungerar) och 1 (fungerar inte). Födelseintensiteten är $\lambda_0 = 1/90$ och dödsintensiteten $\mu_1 = 1/10$. Låt $r_0 = 1$ och $r_1 = \lambda_0/\mu_1 = 1/9$. Den asymptotiska fördelningen ges då av $p_0 = r_0/(r_0 + r_1) = 9/10$ och $p_1 = r_1/(r_0 + r_1) = 1/10$. Låt A och B beteckna kraftverken med kapacitet 100 MW och C kraftverket med kapacitet 200 MW, och låt p_A , p_B och p_C beteckna sannolikheterna att respektive kraftverk fungerar vid en given sen tidpunkt. Vi har då att $p_A = p_B = p_C = 9/10$. För att kraftverk om minst 200 MW ska vara i drift krävs att kraftverk C är i drift eller, om så inte är fallet, att både kraftverk A och B är i drift. Eftesom kraftverkens status är oberoende av varandra, blir den sökta sannolikheten alltså $p_C + p_A p_B (1 - p_C) = 0.981$.

Uppgift 6

Låt a_j beteckna intensiteten när i honor finns kvar. Vi har då att $a_3 = 5 \cdot 3 = 15$, $a_2 = 4 \cdot 2 = 8$ och $a_1 = 3$. Antalet honor i dammen är en ren födelse-dödsprocess med födelseintensiteter $\lambda_j = 0$ och dödsintensiteter $\mu_j = a_j$, dvs en ren dödsprocess.

a) Kolmogorovs framåtekvationer säger i matrisform att $P'(t) = P(t) \cdot Q$, där vi har

$$\mathbf{P}(t) = \begin{pmatrix} P_{33}(t) & P_{32}(t) & P_{31}(t) & P_{30}(t) \\ 0 & P_{22}(t) & P_{21}(t) & P_{20}(t) \\ 0 & 0 & P_{11}(t) & P_{10}(t) \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

och

$$\mathbf{Q} = \begin{pmatrix} -a_3 & a_3 & 0 & 0 \\ 0 & -a_2 & a_2 & 0 \\ 0 & 0 & -a_1 & a_1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -15 & 15 & 0 & 0 \\ 0 & -8 & 8 & 0 \\ 0 & 0 & -3 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Vi får alltså

$$\begin{aligned} P'_{33}(t) &= -15P_{33}(t) \\ P'_{32}(t) &= 15P_{33}(t) - 8P_{32}(t) \\ P'_{31}(t) &= 8P_{32}(t) - 3P_{31}(t) \\ P'_{30}(t) &= 3P_{31}(t) - P_{30}(t). \end{aligned}$$

b) Ekvationen $P'_{33}(t) = -15P_{33}(t)$ medför att $P_{33}(t) = e^{-15t} + C$. Eftersom $P_{33}(0) = 1$ så måste $C = 0$. Alltså $P_{33}(t) = e^{-15t}$.